Ουρές Αναμονής 07.11.2022

Μάθημα 12

Γενικές Μαρκοβιανές Ουρές

1. Ορισμός

$\{Q(t)\}$ # πελατών

Μαρκοβιανή ουρά ≡ Μ.Α.Σ.Χ.

Σε αυτά τα μοντέλα έχουμε:

→ Poisson διαδικασία αφίξεων

→ Exp χρόνοι εξυπηρέτησης

→ Ομαδικές αφίξεις ή/και εξυπηρετήσεις

Έχουμε πολλές μεθόδους μελέτης
1) Πιθανογεννήτριες ← Θα επικεντρωθούμε σε αυτήν
2) Αντιστρεψιμότητα
3) Πινακοαναλυτικές μέθοδοι ,κλπ.

2. Η $M^X|M|1$ ουρά (M|M|1 με ομαδικές αφίξεις)

Poisson διαδικασία αφίξεων ομάδων με ρυθμό λ
Τα μεγέθη των αφικνούμενων ομάδων είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας $(g_k : k \geq 1)$

$g_k = Pr[\text{μέγεθος ομάδας} = k]$

$Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
1 server, άπειρη χωρητικότητα, FCFS πειθαρχία ουράς

Μοντελοποίηση

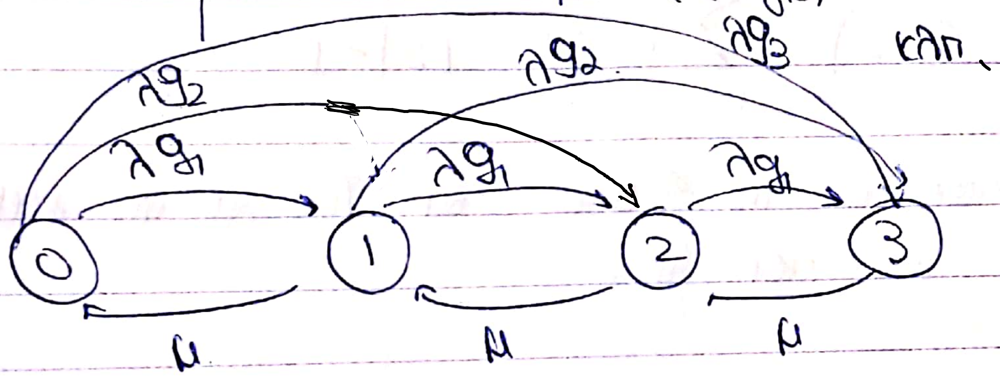
Είναι η $\{Q(t)\}$ Μ.Α.Σ.Χ.;

Οι διαδικασίες αφίξεων των ομάδων μεγέθους k είναι ανεξάρτητες Poisson με ρυθμό λg_k

Από την στιγμή που φτάνει ομάδα μεγέθους k μέχρι την επόμενη άφιξη ομάδας μεγέθους k, ο χρόνος είναι $Exp(\lambda g_k)$

Κατάσταση	Επόμ. κατάσταση	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda g_k)$
⋮		
$n \geq 1$	$n-1$	$Exp(\mu)$
	$n+k$	$Exp(\lambda g_k)$

Άρα πρόβλημα $\{Q(t)\}$ Μ.Α.Σ.Χ.



Εξισώσεις ισορροπίας

(P_n) κατανομή ισορροπίας

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

Για $n \geq 1$

$$(\lambda+\mu) P_n = \mu \cdot P_{n+1} + \sum_{n=0}^{n-1} P_k \lambda g_{n-k}$$

Μέθοδος Πιθανογεννητριών

Ο στόχος είναι να βρούμε την πιθανογεννήτρια της κατανομής ισορροπίας

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad , \; |z| \leq 1$$

Θέτω $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n , \; |z| \leq 1$

Ιδέα: Πολλαπλασιάζω την εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση n με z^n και αθροίζω

$$\lambda P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda+\mu) P_n z^n = \mu P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P_k \lambda g_{n-k} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \mu z^n P_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n}_{P(z)} + \mu \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n}_{P(z)-P_0} = \frac{\mu}{z} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1} z^{n+1}}_{P(z)-P_0}$$

$$+ \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k \sum_{n=k+1}^{\infty} g_{n-k} z^{n-k} \longleftarrow \underset{j=n-k}{\uparrow} \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j = G(z)$$

Τελικά, καταλήγουμε στο:

$$(\lambda+\mu) P(z) - \mu P_0 = \frac{\mu}{z} \left(P(z) - P_0 \right) + \lambda G(z) P(z)$$

$$\overset{*z}{\Leftrightarrow} \left[(\lambda+\mu) z - \lambda z G(z) - \mu \right] P(z) = \mu P_0 z - \mu P_0$$

Επομένως $P(z) = \dfrac{\mu P_0(1-z)}{\mu-(\lambda+\mu)z+\lambda z G(z)}$

Το P_0 το βρίσκουμε με την εξίσωση κανονικοποίησης:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 \Leftrightarrow P(1) = 1$$

Για $z=1$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή (De L' Hospital)

$$1 = P(1) = \frac{-\mu P_0}{-(\lambda+\mu) - \lambda \underbrace{G(1)}_{\substack{1 \\ \uparrow \\ \sum_{j=1}^{\infty} g_j = 1}} + \lambda G'(1)} \leftarrow \sum_{j=1}^{\infty} j g_j = m$$

μέσο μέγεθος αφικνούμενης ομάδας

Άρα $\mu P_0 = \cancel{\lambda} + \mu - \cancel{\lambda} - \lambda m \Rightarrow P_0 = 1 - \dfrac{\lambda m}{\mu}$.

- Συνθήκη ευστάθειας

$P_0 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda m}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda m < \mu$ ← ρυθμός εξυπηρέτησης

λm: ρυθμός αφίξεων

Τελικά $P(z) = \dfrac{\mu\left(1 - \dfrac{\lambda m}{\mu}\right)(1-z)}{\mu - (\lambda+\mu)z + \lambda z G(z)}$

• Μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα

$$E[Q] = P_x'(1)$$

$$P_n = \frac{P_x^{(n)}(0)}{n!}, n \geq 0 \quad (\text{όχι χρήσιμο})$$

• Ειδική περίπτωση μεμονωμένων αφίξεων

$$g_k = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Τότε $G(z) = z$, $m=1$

$$P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(1-z)}{\mu-(\lambda+\mu)z+\lambda z^2} \qquad \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-(1+\rho)z+\rho z^2} = \frac{(1-\rho)(1-z)}{(1-\rho z)(1-z)} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

$$= (1-\rho)\cdot\frac{1}{1-\rho z} = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}(\rho z)^n$$

Επομένως $P_n = (1-\rho)\rho^n$, $n \geq 0$

- Ειδική περίπτωση γεωμετρικού μεγέθους ομάδων

$$g_k = (1-a)a^{k-1}, \quad k \geq 1$$

Τότε $G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-a)a^{k-1} z^k = \frac{(1-a)z}{1-az}$

$$m = \frac{1}{1-a}$$

$$P(z) = \frac{\mu\left(1 - \frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)(1-z)}{\mu - (\lambda+\mu)z + \lambda z \frac{(1-a)z}{1-az}}$$

$$= \frac{\mu\left(1 - \frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(1-z)(1-az)}{\mu(1-az) - (\lambda+\mu)z(1-az) + \lambda(1-a)z^2}$$

$$= \frac{\mu\left(1 - \frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)(1-z)(1-az)}{\mu - \mu az - \lambda z - \mu z + \cancel{\lambda a z^2} + \mu a z^2 + \lambda z^2 - \cancel{\lambda a z^2}}$$

$$= \frac{\mu\left(1 - \frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)\cancel{(1-z)}(1-az)}{\cancel{(1-z)}(\mu - \mu a z - \lambda z)}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{(1-a)\mu}\right)(1-az)}{1 - \left(\frac{\lambda + a\mu}{\mu}\right)z}$$

Επομένως: $\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$:

$$P(z) = \left(1 - \frac{\lambda}{(1-\alpha)\mu}\right) \underbrace{\boxed{\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda+\alpha\mu}{\mu}\right)z}}}_{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda+\alpha\mu}{\mu}\right)^n z^n} - \left(1 - \frac{\lambda}{(1-\alpha)\mu}\right)\alpha z \underbrace{\boxed{\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda+\alpha\mu}{\mu}\right)z}}}_{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda+\alpha\mu}{\mu}\right)^k z^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu(1-\alpha)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda+\alpha\mu}{\mu}\right)^n z^n - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu(1-\alpha)}\right)\alpha \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda+\alpha\mu}{\mu}\right)^{n-1} z^n$$

Επομένως:

$$P_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{(1-\alpha)\mu}, & n = 0 \\[2ex] \left(1 - \dfrac{\lambda}{(1-\alpha)\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda+\alpha\mu}{\mu}\right)^{n-1}, & n \geq 1 \end{cases}$$

- Κατανομή ισορροπίας σε στιγμές αφίξεων ομάδων / ατόμων

$a_n = Pr$ [n πελατών σε στιγμή άφιξης πελάτη]

$a_n^{group} = Pr$ [n πελατών σε στιγμή άφιξης ομάδας]

- $a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^{group} \, \tilde{g}_{n-k+1}$

a_k^{group} → n ομάδα που βλέπει k

$\tilde{g}_{n-k+1}$ ← πιθανότητα να είμαι ο (n-k+1)-οστός στην ομάδα

$a_k^{group} = P_k$ (για τις αφίξεις ομάδων ισχύει η PASTA)

$\tilde{g}_k = Pr$ [να είμαι ο k-οστός στην ομάδα μου]

$\neq$

$g_k = Pr$ [μια ομάδα να έχει μέγεθος k]

πχ

$$g_k = \begin{cases} 1, & k=2 \quad (\text{ομάδες 2 ατόμων μόνο}) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\tilde{g}_k = \begin{cases} 1/2, & k=1 \\ 1/2, & k=2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αν
$$g_k = \begin{cases} 2/3, & k=1 \\ 1/3, & k=2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
(τα 2/3 των ομάδων έχουν μόνο ένα άτομο, το 1/3 των ομάδων έχει 2 άτομα)

$$\tilde{g}_k = \begin{cases} 3/4, & k=1 \\ 1/4, & k=2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Τυπικός υπολογισμός

$$\tilde{g}_k = \lim_{N \to +\infty} \frac{X_1 + \dots + X_N}{Y_1 + \dots + Y_N}$$

Y_i = μέγεθος ομάδας i

X_i = # πελατών στην ομάδα i που ήταν k-οστοί στην ομάδα τους

$$\tilde{g}_k = \lim_{N \to +\infty} \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}}{\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{νόμος μεγάλων αριθμών}}}{=} \frac{E[X]}{E[Y]}$$

$$= \frac{\Pr[Y \geq k]}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{μέσο μέγεθος αφικνούμενων ομάδων}}}{m}} = \frac{\sum_{j=k}^{\infty} g_k}{\sum_{j=1}^{\infty} j g_j}$$