Ουρές Αναμονής 31.10.2022

μάθημα 10

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

1. $M/M/1$ ουρά (σύστημα)

λ: ρυθμός αφίξεων

μ: -"- εξυπηρέτησης $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$d_n = a_n = p_n = (1-\rho)\rho^n$ Geom(ρ) στο $\mathbb{N}_0$

$E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$ $E[S] = \frac{1}{\mu(1-\lambda)}$

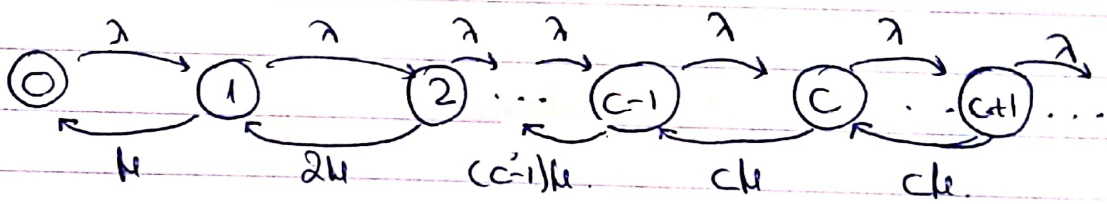
2. M|M|c ουρά

Poisson(λ) αφίξεις
Exp(μ) χρ. εξυπ.
c υπηρέτες, $k=\infty$, FCFS

$Q(t)$ = # πελατών την στιγμή t

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	1	Exp(λ)
$1 \le n \le c-1$	$n+1$	Exp(λ)
	$n-1$	Exp(nμ).
$n \geq c$	$n+1$	Exp(λ)
	$n-1$	Exp(cμ).

Άρα $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ



Ευστάθεια (ειδική περίπτωση του G|G|c)

$\rho < c$ $\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$

Εναλλακτικά

$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=c}^{+\infty} \frac{\rho^j}{c!\, c^{j-c}}$$

$$B^{-1} = \sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} + \sum_{j=c}^{\infty} \frac{\rho^j}{c!(c^{j-c})} = \sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!}$$

$$+ \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=c}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-c}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k \quad (k=j-c)$$

$$B^{-1} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^c}{c!} \frac{c}{c-\rho}, & \frac{\rho}{c} < 1 \\ +\infty, & \frac{\rho}{c} \geq 1 \end{cases}$$

<u>Στάσιμη κατανομή</u>

$$P_n = \begin{cases} B, & \text{αν } n=0 \\ \frac{B \cdot \rho^j}{j!}, & 1 \leq n \leq c-1 \\ \frac{B\rho^j}{c!\, c^{j-c}}, & n \geq c \end{cases}$$

Λόγω PASTA και μεμονωμένων μεταβάσεων

$d_n = a_n = P_n$

Πιθανότητα αναμονής πελάτη

$$\begin{pmatrix}\text{πιθανότητα} \\ \text{αναμονής} \\ \text{πελάτη}\end{pmatrix} = \sum_{j=c}^{+\infty} q_j = \frac{B\,\rho^c}{(c-1)!\,(c-\rho)}.$$

Erlang C- formula .. $C(c,\rho)$.
(Τύπος καθυστέρησης του Erlang)

- $\Pr[Q_q = n \mid Q \geq c] = \Pr[Q = n+c \mid Q \geq c]$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{B}\,\rho^{n+c}}{c!\,c^n}}{\dfrac{\cancel{B}\,\rho^c}{(c-1)!\,(c-\rho)}} = \frac{\rho^n \rho^c (c-1)!\,(c-\rho)}{c!\,c^n\,\rho^c} = \left(1-\frac{\rho}{c}\right)\left(\frac{\rho}{c}\right)^n$$

$n \geq 0$

Άρα $(Q_q \mid Q \geq c) \sim Geom\left(\frac{\rho}{c}\right)$ στο $\mathbb{N}_0$

Μέσος # πελατών στην ουρά

$$E[Q_q] = \underbrace{\cancel{\Pr[Q<c]\,E[Q_q \mid Q<c]}}_{0} + \Pr[Q \geq c]\,E[Q_q \mid Q \geq c]$$

$$= \frac{B\,\rho^c}{(c-1)!\,(c-\rho)}\left(\frac{\frac{\rho}{c}}{1-\frac{\rho}{c}}\right) = \frac{B\,\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

$$E[W] \underset{\uparrow}{=} \frac{E[Q_q]}{\lambda} = \frac{B}{\mu} \cdot \frac{\rho^c}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

Little στην ουρά

$$\mathcal{E}[S] = \mathcal{E}[W] + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{B\rho^c}{(c-\rho)(c-1)!}\right)$$

$$\mathcal{E}[Q] \underset{\text{Little}}{=} \lambda \mathcal{E}[S] \rightarrow \mathcal{E}[Q] = \frac{B\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} + \rho.$$

Κατανομή χρόνου αναμονής στην ουρά

$$F_W(x) = Pr[W \leq x]$$

(για $x \geq 0$) $= Pr[Q^- < c]\,Pr[W \leq x \mid Q^- < c] + Pr[Q^- \geq c]\,Pr[W \leq x \mid Q^- \geq c]$

$$= \left(1 - \frac{B\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\right)\cdot 1 + \frac{B\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{Pr[Q_q^- = n \mid Q^- \geq c]}_{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)\left(\frac{\rho}{c}\right)^n} \underbrace{Pr[W \leq x \mid Q^- \geq c, Q_q^- = n]}_{*}$$

Q_q	$(W \mid Q_q = n,\ Q \geq c)$
$Q_q = 0$	$Exp(c\mu)$
$Q_q = 1$	$Exp(2, c\mu)$
$\vdots$	$\vdots$
$Q_q = n$	$Exp(n+1, c\mu)$

$$* \quad \int_0^x \frac{(c\mu)^{n+1}}{n!} u^n e^{-c\mu u}\, du \quad \left(\text{κατανομή της } Erlang(n+1, c\mu)\right)$$

$$=\left(1-\frac{B\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\right)+\frac{B\cdot\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\int_0^x\left(1-\frac{\rho}{c}\right)c\mu e^{-c\mu u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho\mu u)^n}{n!}\,du$$

$$f_W(x)=\left(1-\frac{B\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\right)+\frac{B\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\int_0^x(c-\rho)\mu e^{-(c-\rho)\mu u}\,du$$

Αρα

$$W=\begin{cases}0, \text{ με πιθανότητα } 1-\frac{B\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\\ Exp(\underbrace{c\mu-\lambda}_{(c-\rho)\mu}), \text{ με πιθανότητα } \frac{B\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}.\end{cases}$$

$$S=W+B \Rightarrow F_S(x)=\int_0^x F_W(x-u)\,\mu e^{-\mu u}\,du.$$

3. Πρόβλημα M|M|2 ουράς

$$B^{-1} = 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2-\rho} = \frac{2+\rho-\rho^2+\rho^2}{2-\rho} = \frac{2+\rho}{2-\rho}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{2-\rho}{2+\rho}, & n=0 \\ \frac{(2-\rho)\rho}{2+\rho}, & n=1 \\ \frac{(2-\rho)\rho^n}{(2+\rho)2^{n-1}}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$E[W] = \frac{\rho^2}{(2+\rho)(2-\rho)\mu}.$$

$$E[S] = \left[\frac{\rho^2}{(2+\rho)(2-\rho)} + 1\right]\frac{1}{\mu} = \frac{4}{(2-\rho)(2+\rho)\mu}.$$

M|M|1 από

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Κεφάλαιο 16

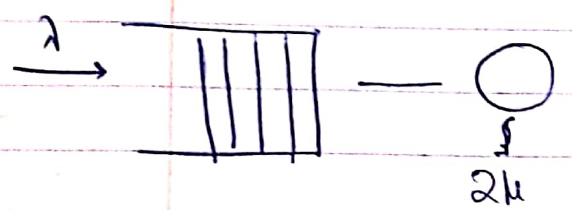
4. Ένας γρήγορος ή δύο αργοί υπηρέτες;

Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
αύξηση χωρητικότητας.

Είναι καλύτερο να έχω 1 υπηρέτη με Exp(2μ) χρόνους εξυπηρέτησης ή 2 με Exp(μ) χρόνους εξυπηρέτησης;

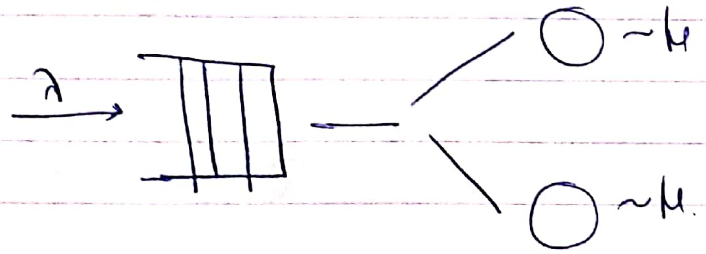
$\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$

Σύστημα 1



$$E[S_{(1)}] = \frac{1}{2\mu\left(1-\frac{\rho}{2}\right)} = \frac{1}{\mu(2-\rho)}$$

Σύστημα 2



$$E[S_{(2)}] = \frac{4}{(2+\rho)(2-\rho)\mu}$$

$\rho < 2$ (ευστάθεια)

$$\frac{E[S_{(1)}]}{E[S_{(2)}]} = \frac{\frac{1}{\cancel{\mu(2-\rho)}}}{\frac{4}{(2+\rho)\cancel{(2-\rho)\mu}}} = \frac{2+\rho}{4} < 1$$

Το σύστημα (1) καλύτερο ως προς τον χρόνο παραμονής

$\rightarrow E[S_{(1)}] < E[S_{(2)}]$

Επίσης $\frac{E[S_{(1)}]}{E[S_{(2)}]} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Για μικρά ρ το σύστημα (1) υπερέχει σαφώς του (2)

Ως προς τους μέσους χρόνους αναμονής

$$E[W_{(1)}] = \frac{\frac{\rho}{2}}{2\mu\left(1-\frac{\rho}{2}\right)} = \frac{\rho}{\mu(4-2\rho)}$$

$$E[W_{(2)}] = \frac{\rho^2}{(2+\rho)(2-\rho)} \cdot \frac{1}{\mu}.$$

$$\frac{E[W_{(1)}]}{E[W_{(2)}]} = \frac{\frac{\rho}{\mu(4-2\rho)}}{\frac{\rho^2}{\mu(2-\rho)(2+\rho)}} = \frac{\cancel{\rho}\cancel{\mu}\cancel{(2-\rho)}(2+\rho)}{\rho^{\cancel{2}}\cancel{\mu}2\cancel{(2-\rho)}} = \frac{2+\rho}{2\rho}.$$

$$= \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \overset{(\rho<2)}{>} 1 \Rightarrow E[W_{(1)}] > E[W_{(2)}]$$

Άρα, ως προς τον χρόνο αναμονής είναι καλύτερο το σύστημα 2.

$$\frac{E[W_{(1)}]}{E[W_{(2)}]} \in (1, +\infty)$$

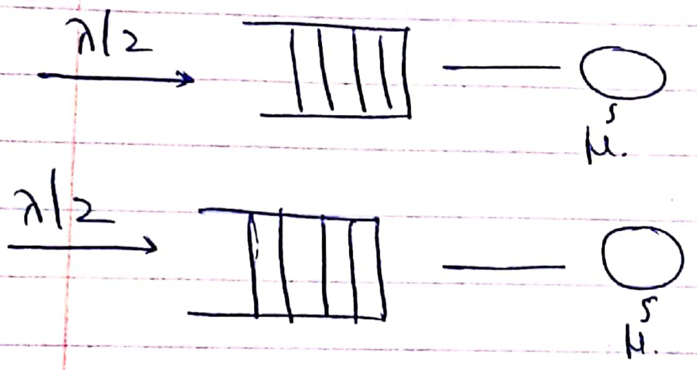
Για μικρά ρ, το σύστημα (2) υπερέχει του (1)

5. Κοινή ουρά ανά υπηρέτη ή όχι;

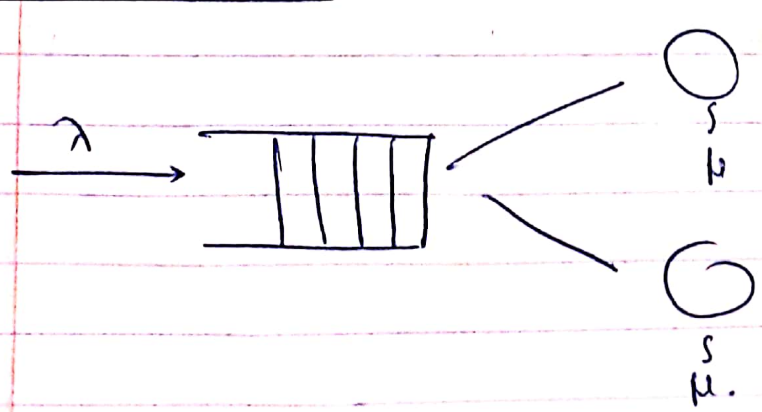
Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
$k = 100$ 2 υπηρέτες

→ Κοινή ουρά ή ουρά ανά υπηρέτη?
(2)   (1)

Σύστημα 1



Σύστημα 2



$\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$ $$E[S_{(1)}] = \frac{1}{\mu\left(1-\frac{\rho}{2}\right)} = \frac{2}{\mu(2-\rho)}$$

$$E[S_{(2)}] = \frac{4}{(2+\rho)(2-\rho)\mu}.$$

$$\frac{E[S_{(1)}]}{E[S_{(2)}]} = \frac{2+\rho}{2} \overset{\rho<2}{>} 1 \rightarrow E[S_{(1)}] > E[S_{(2)}]$$

Άρα η κοινή ουρά (pooling) καλύτερη για τον χρόνο παραμονής και $\frac{E[S_{(1)}]}{E[S_{(2)}]} \in (1,2)$.

Άσκηση

$E[W_{(1)}] =$

$E[W_{(2)}] =$