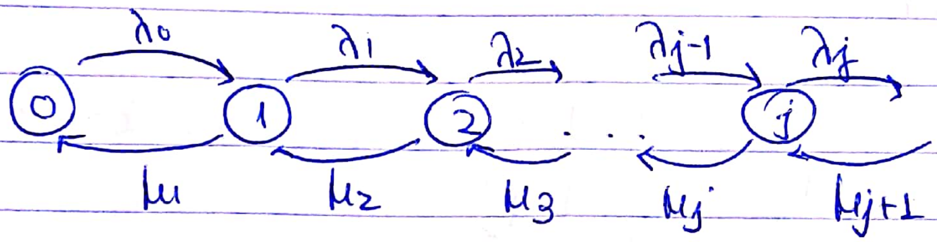
Ουρές Αναμονής 26.10.2022

Μάθημα 9

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

1. Υπενθυμίσεις

- Απλή Μαρκοβιανή ουρά είναι μια ουρά για την οποία η $\{Q(t)\}$ είναι ΜΑΣΧ τύπου γέννησης - θανάτου.



1) Ευστάθεια:

$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j} \begin{cases} = +\infty, & \text{αστάθεια} \\ < +\infty, & \text{ευστάθεια} \end{cases}$$

2) Κατανομές ισορροπίας πλήθους πελατών σε συνεχή χρόνο

$$P_j = \begin{cases} B, & j=0 \\ B\dfrac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j}, & j \geq 1 \end{cases}$$

3) Ρυθμός διαπεραιούς

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n P_n = \mu^*$$

4) Κατανομές ισορροπίας # πελατών σε στιγμές αφίξεων - αναχωρήσεων

$$a_j = \frac{\lambda_j P_j}{\lambda^*}, j \geq 0 \qquad d_j = \frac{\mu_{j+1} P_{j+1}}{\mu^*}, j \geq 0$$

5) Μέσες τιμές

$E[Q]$, $E[S]$ (συνήθως αναζητούμε μέσους χρόνους)
$E[Q^-]$, $E[Q^+]$

6) Μελέτη κύκλου απασχόλησης

$$E[I] = \frac{1}{\lambda_0} \qquad P_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{E[I]}{P_0}$$

7) Κατανομή S, W

$$F_S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j Pr[S \leq x \mid Q^- = j]$$

Scanned with CamScanner

2. M/M/1 ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες (balking)

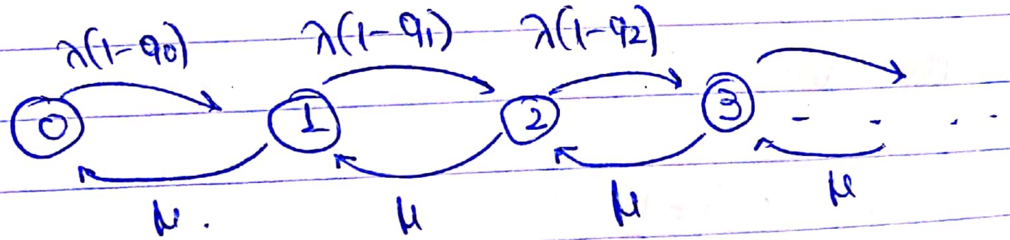
Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
1 server, άπειρη χωρητικότητα, FCFS.
Κάθε αφικνούμενος πελάτης που βλέπει n πελάτες (χωρίς τον ίδιο) αναχωρεί άμεσα με πιθανότητα q_n

Συνήθως $q_n \nearrow$ και $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$.

$Q(t) = \#$ πελατών την στιγμή t.

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	χρόνος
0	1	$Exp(\lambda(1-q_0))$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda(1-q_n))$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

Άρα $\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ τύπου γέννησης - θανάτου.



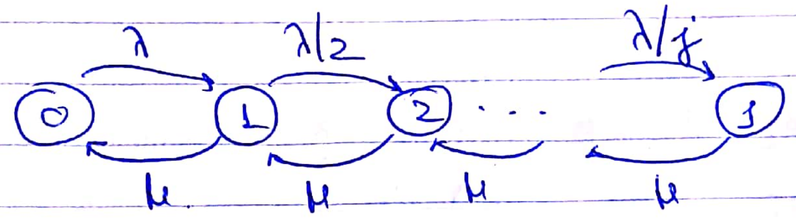
Θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση $q_n = \frac{n}{n+1}$
$\left(q_0 = 0,\ q_1 = \frac{1}{2},\ q_2 = \frac{2}{3} \text{ κτλ}\right)$.

$1 - q_n = \frac{1}{n+1}$ (η πιθανότητα εισόδου στο σύστημα είναι αντιστρόφως ανάλογη του # πελατών αν μπω)

Ευστάθεια

$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} \underset{\rho=\lambda/\mu}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!} = e^{\rho} < +\infty$$

Πάντα ευσταθές.



Κατανομή ισορροπίας # πελατών (σε συνεχή χρόνο).

Στην M/M/1
$P_j = (1-\rho)\rho^j$
$j \geq 0$
$Q \sim Geom(\rho)$

$$P_j = e^{-\rho} \frac{\rho^j}{j!},\ j \geq 0.$$ Άρα $Q \sim Poisson(\rho)$

$E[Q] = \rho$, $E[S] = \frac{1}{\mu}$

για τους αφικνούμενους

Ρυθμός διαπέρασης

$$\lambda^* = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda}{j+1} \frac{e^{-\rho}\rho^j}{j!}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}}_{=e^{\rho}-1}$$

Άρα $\lambda^* = \mu(1 - e^{-\rho})$

Scanned with CamScanner

Εναλλακτικά

$$\mu^* = \lambda^* = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j P_j = \mu \sum_{j=1}^{\infty} P_j = \mu(1-p_0) = \mu(1-e^{-\rho})$$

Κατανομές # πελατών σε στιγμές αφίξεων-αναχωρήσεων

Λόγω PASTA: $a_j = P_j = e^{-\rho}\dfrac{\rho^j}{j!}, \; j \geq 0$

Λόγω μεμονωμένων αφίξεων-αναχωρήσεων $d_j = a_j$

Κατανομές # πελατών σε στιγμές εισόδων-περαίωσης εξυπηρετ.

$$a_j^{enter} = \frac{\lambda_j P_j}{\lambda^*} = \frac{\frac{\lambda}{j+1}\,\frac{e^{-\rho}\rho^j}{j!}}{\mu(1-e^{-\rho})} = \frac{e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}}\,\frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}, \; j \geq 0$$

$$d_j^{enter} \left(= a_j^{enter}\right) = \frac{\mu_{j+1} P_{j+1}}{\mu^*}$$

Ποσοστό χαμένων πελατών

$$\frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} = 1 - \frac{(1-e^{-\rho})}{\rho}$$

Εναλλακτικά:

Ποσοστό χαμένων πελατών = Pr[άμεση αποχώρηση πελάτη]

$$= \sum_{j=0}^{\infty} Pr[Q^- = j] Pr[\text{άμεση αποχώρηση} \mid Q^- = j]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j q_j = \sum_{j=0}^{\infty} p_j q_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\rho} \rho^j}{j!} \frac{j}{j+1} \quad = 1 - \frac{1}{j+1}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\rho}}{\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!} = 1 - \frac{e^{-\rho}}{\rho}(e^{\rho} - 1) = 1 - \frac{(1 - e^{-\rho})}{\rho}.$$

Μέσος χρόνος παραμονής αφιχθέντα.

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Μέσος χρόνος παραμονής εισελθόντα

α' τρόπος $\quad E[S] = Pr[\text{είσοδο}]\, E[S^{enter}] + Pr[\text{αποχώρηση}] \cdot 0$

μέσος χρόνος παραμονής αφιχθέντα

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1 - e^{-\rho}}{\rho} E[S^{enter}] \Rightarrow$$

Πιθανότητα εισόδου = μακροπρόθεσμος ρυθμός εισερχομένων $= \lambda^* / \lambda$

$$E[S^{enter}] = \frac{\lambda}{\mu^2 (1 - e^{-\rho})}$$

Β' τρόπος

$$E[S^{enter}] = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{enter} \cdot E[S^{enter} \mid Q^- = j, enter]$$

Βλέπει j του μπαίνει

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}} \frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!} \cdot \frac{j+1}{\mu} = \frac{\rho e^{-\rho}}{\mu(1-e^{-\rho})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!}$$

$$E[S^{enter}] = \frac{\lambda}{\mu^2(1-e^{-\rho})}$$

γ' τρόπος

Νόμος Little.

$$E[Q] = \lambda^* E[S^{enter}]$$

$$\Rightarrow \rho = \mu(1-e^{-\rho}) E[S^{enter}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[S^{enter}] = \frac{\lambda}{\mu^2(1-e^{-\rho})}.$$

Scanned with CamScanner

Κύκλος απασχόλησης

$$E[I] = \frac{1}{\lambda(1-q_0)}$$

$$P_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda e^{-\rho}}$$

$$E[Y] = E[Z] - E[I] \Rightarrow E[Y] = \frac{1}{\lambda e^{-\rho}} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-e^{-\rho}}{\lambda e^{-\rho}}\right)$$

3. Η M/M/1 ουρά με μεταβλητή ταχύτητα εξυπηρέτησης

Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων

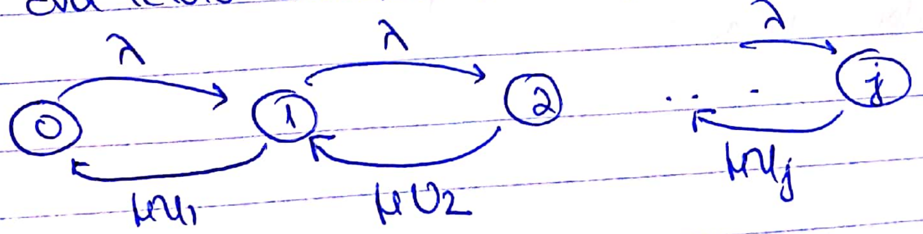
Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης

1 server, $k=+\infty$, FCFS

Όταν υπάρχουν n πελάτες, ο υπηρέτης δουλεύει με ταχύτητα u_n

Αν σε κάποια στιγμή ο υπολειπόμενος ονομαστικός χρόνος εξυπηρέτησης είναι $X \sim Exp(\mu)$, ο πραγματικός χρόνος είναι $\frac{X}{u_n} \sim Exp(u_n \cdot \mu)$.

Άρα ένα τέτοιο σύστημα έχει $\{Q(t)\}$ ΜΑΔΧ.



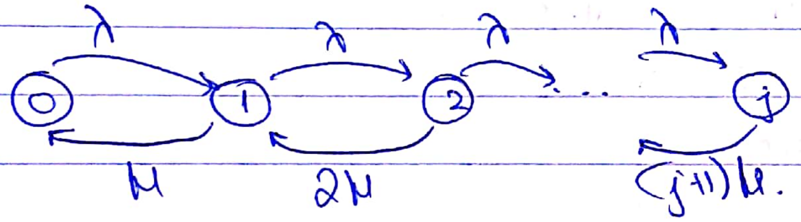
Σημαντικές Ειδικές Περιπτώσεις

1. $\mu_n = \begin{cases} n, & n \le c \\ c, & n > c \end{cases}$ (περίπτωση M/M/c)

2. $\mu_n = \begin{cases} \mu, & n \le c \\ \mu', & n > c \end{cases}$

3. $\mu_n = n$

Μελετάμε την (3).



<u>Ευστάθεια</u>

$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!} = e^{\rho} < +\infty$$

Πάντα ευσταθές

Scanned with CamScanner

Κατανομές ισορροπίας

$$d_j = a_j = P_j = e^{-\rho} \frac{\rho^j}{j!} \quad , j \geq 0$$

$$Q, Q^+, Q^- \sim \text{Poisson}(\rho).$$

Ασκήσεις 6.1 έως 6.5.

Scanned with CamScanner