Ουρές Αναμονής 12.10.2022

Μάθημα 5

Ασκήσεις σε βασικά αποτελέσματα - Ανάλυση Μέσης Τιμής

1.4. $G|M|1$

$\exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης

$q_j = (1-a)a^j \quad j \geq 0$

$Pr[Q^- = j]$

i) $E[Q^-] = ?$ ii) $E[S \mid Q^- = j] = ?$

iii) $E[S] = ?$

i) $$E[Q^-] = \sum_{j=0}^{\infty} j q_j = \sum_{j=0}^{\infty} j(1-a)a^j = (1-a)\sum_{j=0}^{\infty} j a^j$$

• $$\sum_{j=0}^{\infty} t^j = (1-t)^{-1} \xrightarrow{d/dt} \sum_{j=1}^{\infty} j t^{j-1} = (1-t)^{-2}$$

$$\xrightarrow{(t)} \sum_{j=0}^{\infty} j t^j = \frac{t}{(1-t)^2}$$

$$(1-a)\sum_{j=0}^{\infty} j a^j = \frac{a}{1-a}$$

ii) $E[S \mid Q^- = j] = \frac{j+1}{\mu}$.

$$E[S \mid Q^- = j] = E\Big[\sum_{i=1}^{j+1} B_i \mid Q^- = j\Big] = \frac{j+1}{\mu}.$$

χρόνος εξυπηρέτησης j-οστού πελάτη

$B_2, B_3, \ldots B_{j+1}$ ανεξάρτητοι του Q^- και $Exp(\mu)$.
B_1: υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη που εξυπηρετείται $\sim Exp(\mu)$ (λόγω αμνήμονης).

iii) (μια ιδέα)

$$E[S] = E[E[S \mid Q^-]] = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{Pr[Q^- = j]}_{a_j} \underbrace{E[S \mid Q^- = j]}_{\frac{j+1}{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\mu} E[Q^- + 1] = \frac{1}{\mu}\left(\frac{a}{1-a} + 1\right) = \frac{1}{\mu(1-a)}.$$

(άλλη ιδέα)

$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda}$. $\rightarrow$ Q, Q^- όχι ισόνομες
(δεν έχουμε ιδιότητα PASTA)

9.1.

Σύστημα με μετρούμενες αφίξεις και αναχωρήσεις, αρχικά κενό

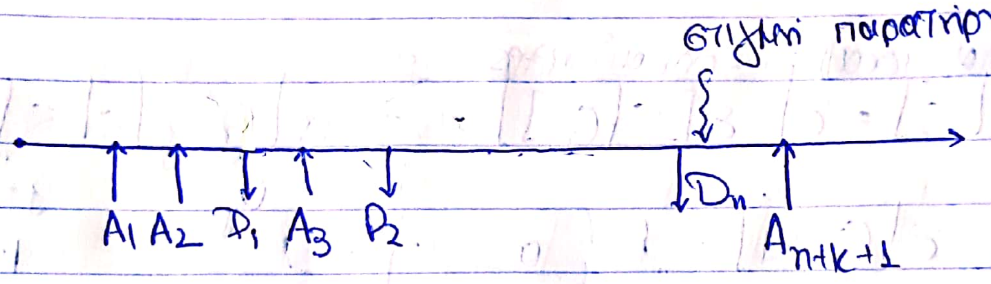
Q_n^- = # πελατών πριν την n-οστή άφιξη

Q_n^+ = # πελατών μετά την n-οστή αναχώρηση

i) $\forall\, n \geq 1,\ \forall\, k \geq 0 \quad : \{Q_n^+ \leq k\} = \{Q_{n+k+1}^- \leq k\}$

ii) $a_n = d_n$

i) $\{Q_n^+ \leq k\} = \{$μέχρι την στιγμή D_n^+ έχουν έρθει το πολύ n+k πελάτες$\}$



$\{$μέχρι την στιγμή D_n^+ έχουν έρθει το πολύ n+k πελάτες$\}$ =

$\{$ο (n+k+1)-οστός αφικνούμενος πελάτης έρχεται μετά την n-οστή αναχώρηση$\}$

$= \{D_n < A_{n+k+1}\} = \{$μέχρι την στιγμή A_{n+k+1}^- έχουν γίνει τουλάχιστον n αναχωρήσεις$\}$

$= \{Q_{n+k+1}^- \leq k\}$

Scanned with CamScanner

ii) Άρα:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[Q^-_{n+k+1} \leq t] = \lim_{n\to\infty} \Pr[Q^+_n \leq t]$$

$$= \Pr[\underbrace{Q^-_n \leq t}_{\sum_{j=0}^{t} a_j}] = \Pr[\underbrace{Q^+ \leq t}_{\sum_{j=0}^{t} d_j}] \quad \forall t.$$

$$\Rightarrow a_j = d_j \quad \forall j.$$

2.3. $G/G/\infty$

με μέσο χρόνο αφίξεων a.

Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης 6

$E[Q] = \lambda E[S] \qquad \lambda = \frac{1}{a} \qquad E[S] = 6.$

2.4. $M/M/c \qquad \lambda = 5$ πελάτες/ώρα.

$6 = 78$ λεπτά

i) Ελάχιστο $c = ?$ για ευστάθεια

ii) Ελάχιστο c ώστε ποσοστό χρόνου απασχολημένου υπηρέτη $\leq 80\%$.

Scanned with CamScanner

i) $\lambda = \frac{5}{60}$ πελάτες / λεπτό

Ευστάθεια : $\rho < c \Leftrightarrow \lambda b < c \Leftrightarrow \frac{5}{60} \cdot 78 < c$

$\Leftrightarrow c > \frac{78}{12}$

Άρα

το ελάχιστο c για ευστάθεια είναι $c = 7$

ii) $\left(\begin{matrix}\text{ποσοστό απασχ} \\ \text{υπηρέτη}\end{matrix}\right) \leq 0.8 \Leftrightarrow \frac{\rho}{c} \leq 0.8$

$\Leftrightarrow \frac{78}{12 \cdot 0.8} \leq c \Leftrightarrow \frac{78}{12 \cdot 8 \cdot 10^{-1}} \leq c \Leftrightarrow$

$\frac{780}{12 \cdot 8} \leq c \Leftrightarrow \frac{390 \cdot \cancel{2}}{12 \cdot \cancel{8}4} \leq c \Leftrightarrow \frac{390}{12 \cdot 4} \leq c$

$\Leftrightarrow \frac{195 \cdot 2}{12 \cdot 4} \leq c$

2.5. Σύστημα εξυπηρέτησης με: Poisson διαδικασία αφίξεων.
$\lambda = 10$ πελάτες/λεπτό (ρυθμός αφίξεων)
χωρητικότητα $k = 9$
P_9 = μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου με 9 πελάτες $= 0.8$
$E[Q] = 7.5$

i) Μέσος χρόνος παραμονής αφικόντα $E[S] = ?$
ii) Μέσος χρόνος παραμονής εισελθόντα $E[S_{enter}] = ?$

i) Νόμος Little
$$E[Q] = \lambda E[S] \Rightarrow 7.5 = 10 E[S] \rightarrow$$
$$E[S] = \frac{7.5}{10} = 0.75 \text{ λεπτά}$$

ii) $E[S] = Pr[Q^- < 9]\, E[S | Q^- < 9] + Pr[Q^- = 9]\, E[S | Q^- = 9]$

$$\Rightarrow 0.75 = 0.2\, E[S_{enter}] + 0.8 \cdot 0$$
$$\Rightarrow E[S_{enter}] = \frac{0.75}{0.2} = 3.75$$

Εναλλακτικά, εφαρμόζω νόμο Little για πελάτες που μπαίνουν

$$E[Q] = \underbrace{\lambda(1 - a_9)}_{\lambda(1 - P_9)} E[S_{enter}] \Rightarrow$$
(λόγω Poisson αφίξεων)

$E[S_{enter}] = 3.75$

5.1. Σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη
Διαδικασίες αφίξεων Poisson(λ_1) για τύπο πελατών 1 και Poisson(λ_2) για τύπο πελατών 2, ανεξάρτητες
Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
Απόλυτη προτεραιότητα πελατών τύπου 1 έναντι πελατών τύπου 2

$$E[Q_1]=?\quad E[Q_2]=?\quad E[S_1]=?\quad E[S_2]=?$$

- Νόμος Little για πελάτες τύπου 1

$$E[Q_1]=\lambda_1 E[S_1]$$

Οι πελάτες τύπου 1 δεν βλέπουν τους πελάτες τύπου 2 (M/M/1 σύστημα)

$$E[Q_1]=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\qquad \rho_1=\frac{\lambda_1}{\mu}$$

$$E[S_1]=\frac{E[Q_1]}{\lambda}=\frac{1}{\mu(1-\rho_1)}=\frac{1}{\mu-\lambda_1}.$$

- Όλο το σύστημα, αν ξεχάσω την ταυτότητα των πελατών, είναι M/M/1 με μια ιδιαίτερη πειθαρχία.

$$E[Q_1+Q_2]=(\lambda_1+\lambda_2)E[S]\quad \text{(νόμος Little)}$$

$$E[Q_1+Q_2]=\frac{\rho}{1-\rho},\quad \rho=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}.$$

$$E[S]=\frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Άρα $E[Q_2]=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{1-(\rho_1+\rho_2)}-\dfrac{\rho_2}{1-\rho_2}$

$$E[S] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} E[S_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} E[S_2]$$

(θεώρημα διπλής μέσης τιμής)

$$E[S] \downarrow \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad E[S_1] \downarrow \frac{1}{\mu(1-\rho_2)}$$

Εναλλακτικά, με νόμο Little για τους πελάτες τ/ω 2.

$$E[Q_2] = \lambda_2 E[S_2]$$

5.3
5.4