Ουρές Αναμονής

10.10.2022
Μάθημα 4

Εφαρμογές - Ασκήσεις :
Βασικά αποτελέσματα - Ανάλυση Μέσης τιμής

1. M/M/1 ουρά
Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
1 server, άπειρη χωρητικότητα, FCFS πειθαρχία ουράς

MVA για $E[Q]$, $E[S]$

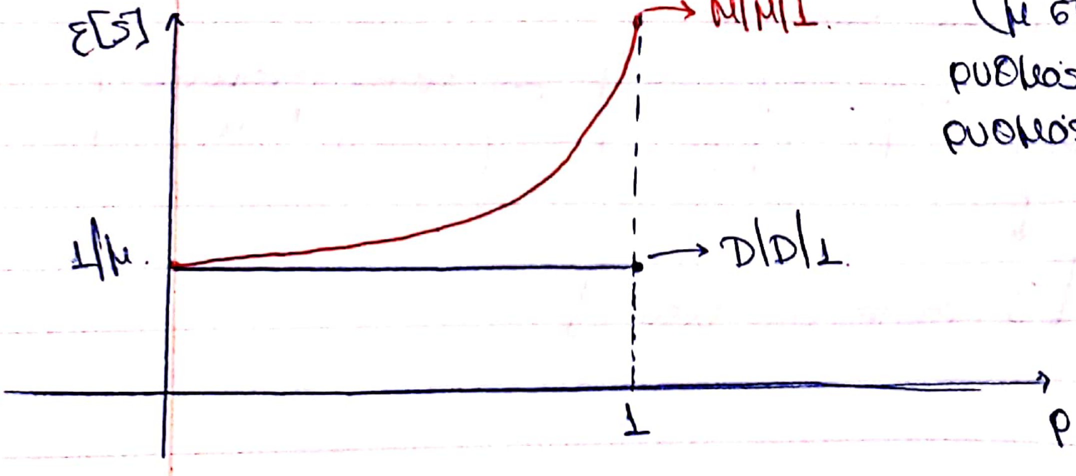
$E[Q] = \lambda E[S]$ (ν. Little)

$E[S] = (E[Q]+1)\frac{1}{\mu}$ (δεσμευση για το S στο Q^-)

$\Rightarrow E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$ $\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right)$

$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$.

• Διαφορά D/D/1 και M/M/1

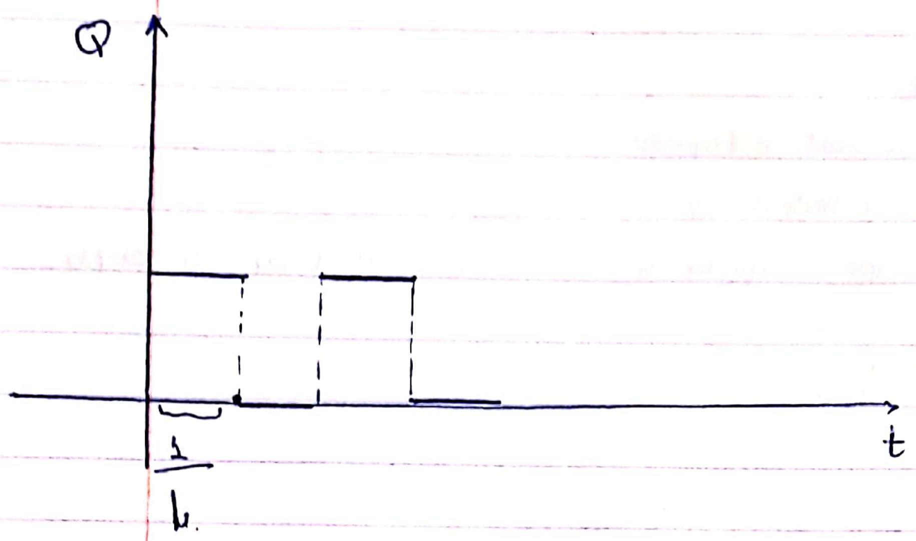


(μ σταθερό).
ρυθμός εξυπηρέτησης $= \mu$.
ρυθμός αφίξεων $= \lambda < \mu$.

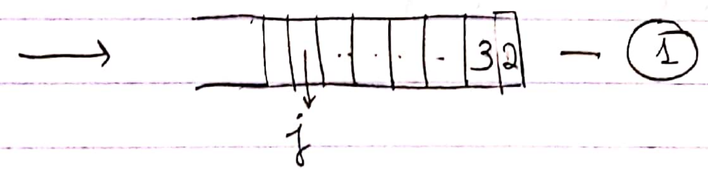
Σε D|D|1 ουρά

$\lambda < \mu \rightarrow \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu} \rightarrow$ (μέσος) ενδιάμεσος χρόνος εξυπηρετήσεων.

$\frac{1}{\lambda}$: (μέσος) ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων



• Προσδιορισμός $P_j = Pr[Q=j]$ με νόμο Little



Νόμος Little στην θέση j

$$E\left[\begin{array}{c}\#\text{πελ στην}\\ \text{θέση } j\end{array}\right] = \left(\begin{array}{c}\text{ρυθμός}\\ \text{αφίξεων}\\ \text{στην}\\ \text{θέση } j\end{array}\right) \cdot E\left[\begin{array}{c}\text{χρόνος παραμονής}\\ \text{στην } j \text{ θέση}\end{array}\right]$$

$\downarrow$

$Pr[\exists$ πελάτης στην θέση $j]$

$$\Rightarrow Pr[Q \geq j] = \lambda\left(0 \cdot Pr[Q^- < j-1] + \frac{1}{\mu} Pr[Q^- \geq j-1]\right)$$

Θεωρούμε ότι όλοι οι πελάτες περνούν από την j-θέση, έστω στιγμιαία.

Άρα $Pr[Q \geq j] = \frac{\lambda}{\mu} Pr[Q^- \geq j-1]$

$$\Rightarrow Pr[Q \geq j] = \rho Pr[Q^- \geq j-1]$$

$$\xrightarrow{\text{PASTA}} Pr[Q \geq j] = \rho Pr[Q \geq j-1] \Rightarrow$$

$$\sum_{k=j}^{+\infty} P_k = \rho \sum_{k=j-1}^{+\infty} P_k \quad \text{για } j \geq 1, 2, \ldots$$

(j=1). $(1-P_0) = \rho$

$$(j) \quad \sum_{k=j} P_k = \rho \sum_{k=j-1}^{\infty} P_k$$

(αφαιρώ κατά μέλη) $\Longrightarrow$

$$(j+1) \quad \sum_{k=j+1}^{\infty} P_k = \rho \sum_{k=j}^{\infty} P_k$$

$$P_j = \rho P_{j-1}, \quad j \geq 1$$

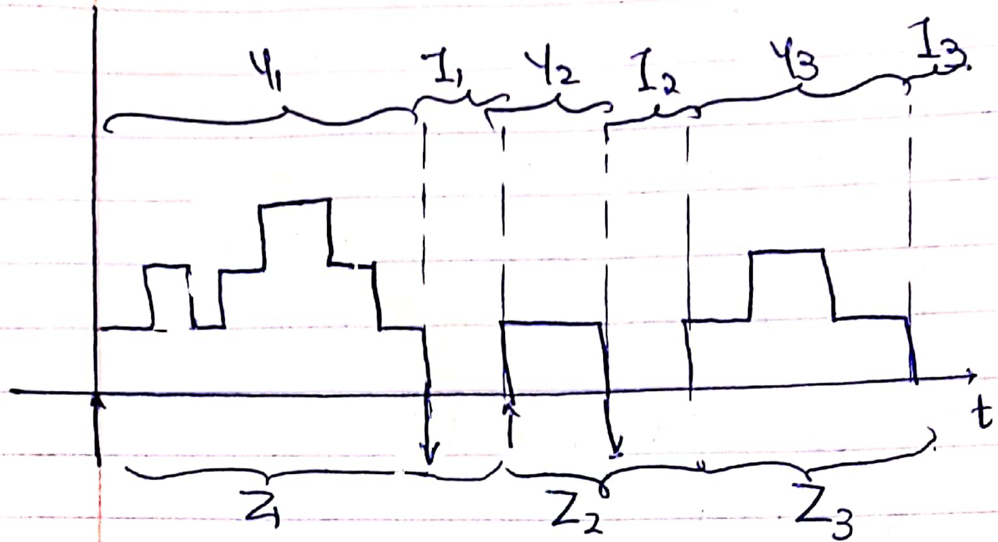
Η κατανομή ισορροπίας είναι:

$$P_j = (1-\rho)\rho^j, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

$$Q \sim Geom(\rho)$$

Scanned with CamScanner

Μελέτη κύκλου λειτουργίας της M/M/1



$E[I]$: μέση περίοδος αργίας = ?

$E[Y]$: μέση περίοδος λειτουργίας = ?

$E[Z]$ μέσος κύκλος λειτουργίας = ?

N = # πελατών που εξυπηρετούνται σε 1 κύκλο

$E[N] = ?$

$Pr[N=1] = ?$

A: τυπικός ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων.

B: τυπικός χρόνος εξυπηρέτησης

Αναγεννητικότητα:

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$$

Όμως $I \sim Exp(\lambda)$ (λόγω αμνήμονης)

$$\Rightarrow E[I] = \frac{1}{\lambda}.$$

$$E[Z] = \frac{E[T]}{p_0} = \frac{1}{\lambda p_0} = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}.$$

$$E[Y] = E[Z] - E[T] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

<u>Εναλλακτικά:</u>

$$E[Y] = \underset{(1/\mu)}{E[B]} + \lambda E[B] \cdot E[Y]$$

μέσο πλήθος πελατών στον 1ο χρόνο εξυπηρέτησης

$$\Rightarrow E[Y] = \frac{E[B]}{1-\lambda E[B]} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Σωστός τύπος, προβληματική αιτιολόγηση

$$E[Y] = E[N]E[B] \Rightarrow \frac{1}{\mu(1-\rho)} = E[N]\frac{1}{\mu}.$$

$$\Rightarrow E[N] = \frac{1}{1-\rho}$$

Αυστηρά: $Y = \sum_{i=1}^{N} B_i \Rightarrow E[Y] = E\left[\sum_{i=1}^{N} B_i\right] \overset{?}{=} E[N]E[B]$

$$E[N] = 1 + \lambda E[B] E[N]$$

$$\Rightarrow E[N] = \frac{1}{1-\lambda E[B]} = \frac{1}{1-\rho}.$$

Εναλλακτικά 2:

μακροπρόθεσμος

$$\text{ρυθμός αφίξεων} = \lambda = \frac{E[N]}{E[Z]}$$

$$\Rightarrow E[N] = \lambda E[Z] = \frac{\lambda}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{1-\rho}.$$

$Pr[N=1]$

$$Pr[N=1] = Pr\left[\begin{array}{c}\text{χρόνος εξυπηρέτησης} \\ \text{πρώτου πελάτη}\end{array} < \begin{array}{c}\text{υπολειπόμενος ενδιάμεσος} \\ \text{χρόνος άφιξης } 2^{ου} \text{ πελάτη}\end{array}\right]$$

$$= Pr[B < A] = \frac{\mu}{\mu+\lambda} > \frac{\mu}{\mu+\mu} = \frac{1}{2}.$$

$B \sim Exp(\mu)$

$A \sim Exp(\lambda)$

ευσταθές σύστημα ($\lambda < \mu$)

Ανάλυση Μέσης Τιμής στην M/M/1 με χρόνους επανεκκίνησης

(Παραλλαγή της M/M/1 ουράς)

$$\hat{\uparrow}\ \ \dot{\uparrow}$$
$$M/M/1$$

→ Αναχώρηση που αφήνει κενό το σύστημα: ακαριαία απενεργοποίηση υπηρέτη

→ Άφιξη σε κενό σύστημα: $Exp(\theta)$ χρόνος ενεργοποίησης

$E[Q] = ?$ $\quad E[S] = ?$

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο υπηρέτης είναι ενεργοποιημένος} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Νόμος Little: $E[Q] = \lambda E[S]$

Θεωρώ επιλεγμένο πελάτη με χρόνο παραμονής S που βρίσκει Q^- πελάτες στην άφιξή του, και I^- κατάσταση υπηρέτη

- $E[S] = Pr[I^- = 0] E[S \mid I^- = 0] + Pr[I^- = 1] E[S \mid I^- = 1]$

$Pr[I^- = 1] = Pr[I = 1]$ (γενικευμένη ιδιότητα PASTA).

$\underset{\uparrow}{=} \lambda \cdot E[B]$

νόμος Little σε χώρο εξυπηρέτησης ρ.

$(E[Q_S] = \rho)$.

$Pr[I^- = 0] = 1 - \rho$.

$$E[S \mid I^- = 0] = \frac{1}{\theta} + E[Q^- + 1 \mid I^- = 0] \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$E[S \mid I^- = 1] = E[Q^- + 1 \mid I^- = 1] \cdot \frac{1}{\mu}$$

Άρα

$$E[S] = (1-\rho) \cdot \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\mu}\Big[\Pr[I^- = 0]\, E[Q^- + 1 \mid I^- = 0] + \Pr[I^- = 1]\, E[Q^- + 1 \mid I^- = 1]\Big]$$

$$= E[Q^- + 1] \xrightarrow{\text{PASTA}} E[Q + 1]$$

Άρα

$$\left.\begin{aligned} E[Q] &= \lambda E[S] \\ E[S] &= \frac{1-\rho}{\theta} + \frac{E[Q]+1}{\mu} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$E[Q] = \frac{\lambda(1-\rho)}{\theta} + \rho E[Q] + \rho \rightarrow$$

$$E[Q] = \frac{1}{\theta} + \frac{\rho}{1-\rho}$$

(ν. Little) $$E[S] = \underbrace{\frac{1}{\theta}}_{\text{extra επιβάρυνση}} + \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$ → μέσος χρόνος παραμονής στην M/M/1.

Ανάλυση μέσης τιμής στην M|M|1 ουρά με την k-πολιτική ενεργοποίησης

M|M|1

→ Αναχώρηση που αφήνει κενό σύστημα: ακαριαία απενεργοποίηση

→ Μόλις συσσωρευθούν k πελάτες: ακαριαία ενεργοποίηση υπηρέτη

$\mathbb{E}[Q], \mathbb{E}[S] = ?$

Ίδια ανάλυση με πριν:

$$\mathbb{E}[Q] = \lambda \mathbb{E}[S]$$

$$\mathbb{E}[S] = \underbrace{\Pr[I^- = 0]}_{1-\rho} \mathbb{E}[S \mid I^- = 0] + \underbrace{\Pr[I^- = 1]}_{\rho} \underbrace{\mathbb{E}[S \mid I^- = 1]}_{\frac{\mathbb{E}[Q^- + 1 \mid I^- = 1]}{\mu}}$$

Η διαφορά είναι στο ότι:

$$\mathbb{E}[S \mid I^- = 0] = \frac{k - \mathbb{E}[Q^- \mid I^- = 0] - 1}{\lambda} + \frac{\mathbb{E}[Q^- + 1 \mid I^- = 0]}{\mu}$$

Λόγω της PASTA $(Q^- \mid I^- = 0) \stackrel{d}{=} (Q \mid I = 0)$

$(Q^- \mid I^- = 0) \sim \mathcal{U}nif(\{0, \ldots, k-1\})$