Ουρές Αναμονής 05.10.2022

μάθημα 3

Βασικά αποτελέσματα

Νόμος Little, Εισαγωγή στην ανάλυση μέσης τιμής

4 Βασικά αποτελέσματα.

1. Χαρακτηρισμός ευστάθειας

$G/G/C$, $\rho = \lambda b$. όχι στο $D/D/C$.

$\rho < c$ ευστάθεια $\rho \geq c$ αστάθεια

2. Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων

Αφίξεις-αναχωρήσεις μεμονωμένα. $\rightarrow (a_j) = (d_j)$.

3. Ιδιότητα PASTA

Poisson διαδικασία αφίξεων $\rightarrow (a_j) = (p_j)$.

4. Νόμος Little

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$$

μέσος # πελατών = ρυθμός αφίξεων · μέσος χρόνος παραμονής

Παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{l} E[Q] = 4 \\ \lambda = 3 \text{ πελάτες/ώρα} \end{array}\right\} \rightarrow E[S] = \frac{4}{3} \text{ ώρες } (= 1 \text{ ώρα } 20 \text{ λεπτά})$$

• **Οικονομική Απόδειξη Νόμου Little**

Κάθε πελάτης πληρώνει 1 χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα.

Μακροπρόθεσμος ρυθμός εσόδων με συνεχή χρέωση πελατών = μακροπρόθεσμος ρυθμός εσόδων με προκαταβολική χρέωση πελατών.

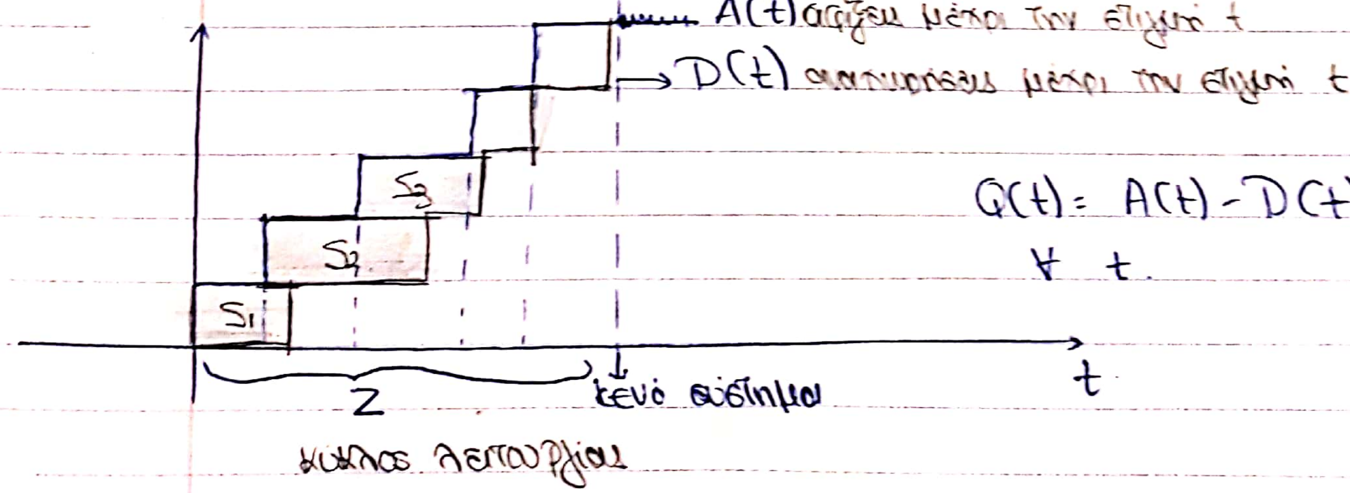
$E[Q]$

ρυθμός αφίξεων · μέσος χρόνος παραμονής

(ή ρυθμός αφίξεων · μέσο έσοδο ανά πελάτη)

$\lambda \cdot E[S]$

• **Πιθανοθεωρητική Απόδειξη Νόμου Little**



$$Q(t) = A(t) - D(t)$$
$$\forall\ t.$$

$$\varepsilon[Q] = \frac{\varepsilon\left[\int_0^z Q(u)\,du\right]}{\varepsilon[z]}$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon[A(Z)]}{\varepsilon[Z]}$$

$S_1, \ldots S_{A(z)}$
χρόνοι παραμονής πελατών

$$\varepsilon[S] = \frac{\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{A(Z)} S_i\right]}{\varepsilon[A(Z)]}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\varepsilon\left[\int_0^z Q(u)\,du\right]}{\varepsilon[Z]} = \frac{\varepsilon[A(Z)]}{\varepsilon[Z]} \cdot \frac{\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{A(Z)} S_i\right]}{\varepsilon[A(Z)]}$$

δηλαδή $\varepsilon\left[\int_0^z Q(u)\,du\right] = \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{A(Z)} S_i\right]$

Έχουμε ότι:

Για κάθε πελάτη $k = 1, 2 \ldots A(z)$, $\forall\, u \in (0, z]$

$$I_k(u) = \begin{cases} 1, & \text{πελάτης } k \text{ παρών την στιγμή } u \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε:

$$\sum_{k=1}^{A(z)} I_k(u) = Q(u).$$

$$\int_0^z I_k(u) = S_k.$$

Άρα

$$E\left[\int_0^z Q(u)du\right] = E\left[\int_0^z \sum_{k=1}^{A(z)} I_k(u)du\right]$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{A(z)} \int_0^z I_k(u)du\right] = E\left[\sum_{k=1}^{A(z)} S_k\right]$$

Οπότε $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$.

Άμεσες συνέπειες του νόμου του Little

i) Θεώρημα Little στον χώρο αναμονής

$$E[Q_q] = \lambda \cdot E[W]$$

μέσος αριθμός πελατών σε αναμονή

μέσος χρόνος αναμονής

ii) Θεώρημα Little στον χώρο εξυπηρέτησης

$$E[Q_s] = \lambda \cdot E[B] = \rho \quad \text{(ρυθμός συνωστισμού)}$$

μέσο πλήθος πελατών στον χώρο εξυπηρέτησης

(*) ||

μέσο πλήθος απασχολημένων υπηρετών

μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη.

(*) για μεμονωμένες εξυπηρετήσεις (1-1 αντιστοιχία μεταξύ υπηρετών που εξυπηρετούν και πελατών που εξυπηρετούνται).
(πχ G|G|c).

∴ Πλήθος απασχολημένων υπηρετών σε G|G|C $= \sum_{k=1}^{c} I_k$

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{ο } k \text{ υπηρέτης απασχολημένος} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$E[I_k] = P_r(I_k = 1)$.

Άρα: $\rho = c \cdot$ (πιθανότητα απασχολημένου υπηρέτη)

⇒ Πιθανότητα απασχολημένου υπηρέτη (μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου απασχ. υπηρέτη) $= \dfrac{\rho}{c}$.

Ειδικά σε G|G|1 συστήματα (1 υπηρέτης) ισχύει: $E[Q_s] = \rho$ ⟺

$1 \cdot P_r[Q_s = 1] + \cancel{0 \cdot P_r[Q_s = 0]} = \rho$ ⟺

$Pr[Q \geq 1] = \rho$

⟺ $Pr[Q = 0] = 1 - \rho$.

Αποτελέσματα για το ρ

$\rho = \lambda b$ μέση εισερχόμενη εργασία στο σύστημα
(χρόνος διεκπεραίωσης ανά μονάδα χρόνου)

ρ = μέσος # πελατών σε εξυπηρέτηση

Σε G/G/C σύστημα ρ = μέσος # απασχολημένων υπηρετών
Ειδικά σε G/G/1 σύστημα ρ = πιθανότητα μη κενού συστήματος

$\frac{\rho}{c}$ = ποσοστό χρόνου απασχολημένου υπηρέτη

Ανάλυση Μέσης Τιμής (mean value analysis)

Οικονομικός τρόπος υπολογισμού $E(Q)$, $E(S)$.
Χρειάζομαι 2 εξισώσεις: 1 από τον νόμο Little
και 1 δεσμεύοντας για τον υπολογισμό του $E(S)$
στο πλήθος πελατών που βρίσκει μπαίνοντας (δηλ. Q^-)
(μόνο για Poisson αφίξεις, ώστε $Q^- \overset{d}{=} Q$ (ιδ. PASTA)).

Ανάλυση μέσης πλήρης για την M|M|1|1 ουρά.
(Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων, Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης, 1 server, χωρητικότητα 1)

$$E[Q] = \lambda E[S]$$

$$E[S] = Pr[Q^- = 0] \cdot \underbrace{E[S \mid Q^- = 0]}_{1/\mu} + Pr[Q^- = 1] \underbrace{E[S \mid Q^- = 1]}_{0}$$

$$\Rightarrow E[S] = a_0 \cdot \frac{1}{\mu}$$

Άρα $E[Q] = \frac{\lambda a_0}{\mu} \left(\rho = \frac{\lambda}{\mu} \right) = \rho a_0$

λόγω PASTA $E[Q] = \rho P_0$

$$E[Q] = 1 \cdot Pr[Q=1] + \cancel{0 \cdot Pr[Q=0]} = P_1$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \rho P_0 \\ P_0 + P_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1+\rho} \quad P_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$$

$$E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho} \qquad E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1+\rho)}$$