HILLIER & LIEBERMAN
INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH

CHAPTER 19: INVENTORY THEORY.

19.3-2 Πρόκειται για μοντέλο EOQ. Έστω μονάδα χρόνου ένας μήνας. Τότε έχουμε:

Ρυθμός ζήτησης	$\alpha = 30$ / μήνα
Σταθερό κόστος	$K = 15$
Μεταβλητό κόστος	$c = 1$ / μονάδα
Κόστος αποθήκευσης	$h = 0.3$ / μονάδα, μήνα

(a) Χωρίς ελλείψεις η βέλτιστη πολιτική καθορίζεται από

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}} = 54.77 \quad , \quad t^* = \sqrt{\frac{2K}{\alpha h}} = 1.82$$

δηλαδή ποσότητα παραγωγής 54.77 μονάδες κάθε φορά, ή ισοδύναμα παραγωγή κάθε 1.82 μήνες. Το μέσο κόστος της βέλτιστης πολιτικής είναι ίσο με

$$C^* = c\alpha + \sqrt{2K\alpha h} = 46.43 \text{ €/μήνα}$$

(b) Όταν επιτρέπονται ελλείψεις με κόστος $p = 2$/μον. μήνα, η βέλτιστη πολιτική

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} = 72.46 \quad , \quad S^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} = 41.41 \quad , \quad Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{p}}\sqrt{\frac{h}{p+h}} = 31.05$$

$$t^* = \frac{Q^*}{\alpha} = 2.42 \quad , \quad C^* = \alpha c + \frac{\alpha K}{Q^*} + \frac{h S^{*2}}{2Q^*} + \frac{p(Q^* - S^*)^2}{2Q^*} = 42.42$$

Δηλαδή παραγγέλνουμε 72.46 μονάδες κάθε 2.42 μήνες. Η μέγιστη ποσότητα ελλείψεων είναι 31.05 μονάδες κ' το μέγιστο απόθεμα 41.41. Το μέσο κόστος είναι τώρα ίσο με 42.42 €/μήνα, δηλ. περίπου 4€ χαμηλότερο από πριν.

19.3-3 Πρόβλημα EOQ με
$\alpha = 13/\epsilon\beta\delta = 13 \cdot 52 = 676/$έτος
$K = 75$
$c = 3{,}000$
$h = (0.2)\, c = 600$ €/μονάδα, έτος

(a)-(e)

Τα διάφορα κόστη ανά έτος, ως συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας Q είναι:

Σταθερό Κόστος $= \dfrac{K\alpha}{Q}$

Κόστος Αποθήκευσης $= \dfrac{1}{2} h Q$
Κόστος Αγοράς $= c\alpha$

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει πώς μεταβάλλονται αυτά τα κόστη για διάφορη τιμή του Q.

Q	$K\alpha/Q$	$\frac{1}{2}hQ$	$c\alpha$	Total = C
5	10140	1500	2028000	2039640
10	5070	3000	2028000	2036070
15	3380	4500	2028000	2035880
20	2535	6000	2028000	2036535
25	2028	7500	2028000	2037528
30	1690	9000	2028000	2038690
35	1448	10500	2028000	2039949
40	1268	12000	2028000	2041268

Βλέπουμε από τον πίνακα ότι η ποσότητα Q που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος είναι μεταξύ 10 κ' 20 μονάδων.

Από τον τύπο για τη βέλτιστη πολιτική παίρνουμε:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}} = 13 \quad , \quad t^* = \sqrt{\frac{2K}{\alpha h}} = 0.0192 \text{ έτη} = 1 \text{ εβδομάδα}$$

$$C^* = C\alpha + \sqrt{2K\alpha h} = 2035800$$

Δηλαδή να γίνεται παραγγελία 13 προϊόντων κάθε εβδομάδα το μέσο κόστος είναι ίσο με 2035800 €/έτος = 39150 €/εβδομ.

Το κόστος διαχείρισης (εκτός το καθαυτό κόστος αγοράς $C\alpha$) είναι $\frac{K\alpha}{Q} + \frac{1}{2}hQ$.

Για την πολιτική που ακολουθείται τώρα με $Q=5$ το κόστος διαχείρισης προκύπτει από τον πίνακα ίσο με $10140 + 1500 = 11640$, ενώ για τη βέλτιστη πολιτική είναι ίσο με $\sqrt{2K\alpha h} = 7800$.

Επομένως αν αλλάξει η παρούσα πολιτική κ' εφαρμοστεί η βέλτιστη, η οικονομία στο ετήσιο κόστος θα είναι

$$\frac{11640 - 7800}{11640} = 0.33 \text{ ή } 33\%.$$

19.3-4 Μοντέλο EOQ

Ζήτηση $a = 8500$ γαλ/μήνα

Σταθερό Κόστος $K = 1000$

Μεταβλ. Κόστος $c = 1.05$/γαλ.

Κόστος Αποθ. $h = 0.01$/γαλ, μήνα

(a) $C = ca + \frac{ka}{Q} + \frac{1}{2} hQ$

Για $Q = 8500$: $C = 8585 + 1000 + 42.50 =$

$= 9627.50$ \$/μήνα $= 115530$ \$/έτος

η αν θεωρήσουμε μόνο τα διαχειριστικά κόστη

$C_{διαχ} = 1042.5$ \$/μήνα $= 12510$ \$/έτος

(d-e) Η βέλτιστη πολιτική είναι

$Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}} = 41231{,}06$ γαλ., $T^* = 4.85$ μην

$C^* = 8997.31$ \$/μην $\quad C^*_{διαχ} = 412.31$ \$/μην

Δηλαδή να αγοράζονται 41231 γαλόνια κάθε 4.85 μήνες.

Η μείωση στο μέσο κόστος διαχείρισης σε σχέση με την αρχική πολιτική είναι

$$\frac{1042.5 - 412.31}{1042.5} = 0.604 = 60.4\%$$

19.3-5 Μοντέλο EOQ

Ζήτηση $a = 200$ /εβδ $= 10400$ /έτος

Σταθ Κόστος $K = 20$

Κόστος Αγοράς $c = 1$

Κόστος Αποθ $h = 0.15c + 0.05 = 0.20$ \$/μον, έτος

(a) $Q^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = 1442.2$, $T^* = \sqrt{\frac{2K}{ah}} = 0.139$ έτη $= 7.2$ εβδ.

$C^* = \sqrt{2Kah} = 288.44$ \$/έτος

(b) Αν $h_1 = 0.10c + 0.05 = 0.15$, τότε

$Q_1^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h_1}} = 1665.3$ $T_1^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h_1}} = 0.1603 = 8.33$ εβδ.

$C_1 = 249.8$ \$/έτος

ενώ αν για αυτή την τιμή του h εφαρμοστεί η πολιτική του (a) $Q = 1442.2$

$$C(Q) = \frac{Ka}{Q} + \frac{1}{2} h Q = 252.39 \text{ \$/έτος}$$

δηλ. αύξηση του κόστους κατά $\frac{252.39 - 249.8}{249.8} = 1.03\%$

(c) Αν $h_2 = 0.20c + 0.05 = 0.25$ τότε

$Q_2^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h_2}} = 1289.96$, $T_2^* = \sqrt{\frac{2K}{ah_3}} = 0.124 = 6.45$εβδ, $C_3^* = \sqrt{2Kah_3} = 322.5$

Ενώ αν εφαρμοζόταν η πολιτική του (a) $Q = 1442.2$

$C(Q) = \frac{Ka}{Q} + \frac{1}{2} hQ = 324.5$, δηλ. αύξηση του κόστους κατά $\frac{324.5 - 322.5}{322.5} = 0.62\%$

(d) Εφαρμόζοντας τον τύπο του EOQ για τιμές $h = r \cdot c + 0.05 = r + 0.05$, με $r = 0.10, 0.12, \ldots, 0.2$ έχουμε

r	h	$Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}}$	$T^* = \sqrt{\frac{2K}{\alpha h}}$	$C^* = \sqrt{2K\alpha h}$
0.10	0.15	1665.3	0.160	249.80
0.12	0.17	1564.3	0.150	265.93
0.14	0.19	1479.7	0.142	281.14
0.16	0.21	1407.5	0.135	295.57
0.18	0.23	1344.9	0.129	309.32
0.20	0.25	1289.6	0.124	322.49

(e) Για $h = 0.15 + 5 = 0.20$, κάνουμε αντίστοιχη ανάλυση για τιμές του σταθερού κόστους $K = 20 \cdot t$, $t = 0.5, 1, 1.25, 1.50$

t	$K = 20t$	$Q^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h}}$	$T^* = \sqrt{\frac{2K}{ah}}$	$C^* = \sqrt{2Kah}$
0.5	10	1019.8	0.098	203.96
0.75	15	1249	0.12	249.80
1.0	20	1442.2	0.139	288.44
1.25	25	1612.4	0.155	322.49
1.50	30	1766.4	0.170	353.27

(f) Αν μεταβάλουμε τις τιμές του K κ' h μαζί, παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα για τις ποσότητες παραγγελίας

K \ h	0.15	0.17	0.19	0.21	0.23	0.25
10	1177.6	1106.1	1046.3	995.2	951.0	912.1
15	1442.2	1354.7	1281.4	1218.9	1164.7	1117.1
20	1665.3	1564.3	1479.7	1407.5	1344.9	1289.9
25	1861.9	1748.9	1654.3	1573.6	1503.6	[illegible]2.2
30	2039.6	1915.9	1812.2	1723.8	1647.1	1579.87

19.3-6 Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι $Q^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h}}$

(a) Αν το K μειωθεί κατά 75% : $K_1 = 0.25K$, τότε

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2K_1 a}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (0.25)Ka}{h}} = \sqrt{0.25} \cdot Q^* = 0.5\, Q^*$$

(b) Αν $a_1 = 4a \Rightarrow Q_1^* = \sqrt{\frac{2Ka_1}{h}} = \sqrt{\frac{2K \cdot 4a}{h}} = \sqrt{4 \cdot \frac{2Ka}{h}} = 2Q^*$

(c) Αν $K_1 = 0.25K$, $a_1 = 4a$, τότε

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2K_1 a_1}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot Ka}{h} (0.25) \cdot 4} = Q^*$$

(d) Αν $h_1 = 0.25h \Rightarrow Q_1^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h_1}} = \sqrt{\frac{2Ka}{0.25h}} = \sqrt{4 \frac{2Ka}{h}} = 2Q^*$

(e) Αν $K_1 = 0.25K$, $h_1 = 0.25h \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_1^* = \sqrt{\frac{2K_1 a}{h_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.25K \cdot a}{0.25h}} = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = Q^*$$

4.3-7 Ζήτηση = 50 μον/μήνα

$K = 75$

$c = 20$

(a) Για να είναι η πολιτική $Q = 50$, $T^* = 1$ βέλτιστη θα πρέπει

$$Q = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} \Rightarrow Q^2 = \frac{2Ka}{h} \Rightarrow h = \frac{2Ka}{Q^2} = 3\ \$/\text{μον. μήνα}$$

δηλαδή το κόστος αποθήκευσης θα έπρεπε να είναι
$h = 3 = 15\%$ του κόστους αγοράς ανά μήνα (υπερβολικό)
δηλαδή σε ετήσια βάση $h = 36$/μον, έτος, ή 180% του κόστους αγοράς

(b) Αν το ετήσιο κόστος αποθήκευσης είναι $h = 0.2c = 4\ \$/\text{έτος}$ τότε ανά μήνα

$$h = \frac{4}{12} = 0.33\ \$/\text{μον, μήνα}$$, τότε

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = 150.76 \quad , \quad T^* = 3.015 \text{ μήνες}$$

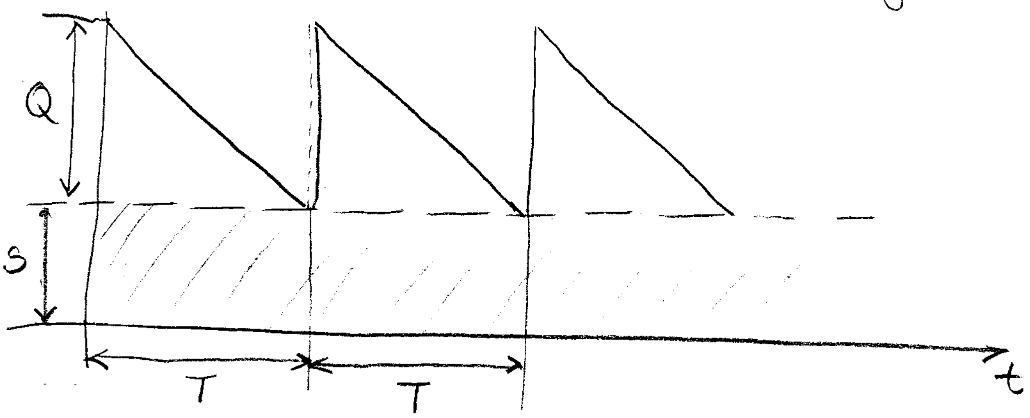
$$C^* = \sqrt{2Kah} = 49.75/\text{μήνα} = 597\ \$/\text{έτος}$$

Κάτω από αυτή την τιμή του h, το κόστος της πολιτικής $Q = 50$ είναι

$$C = \frac{Ka}{Q} + \frac{1}{2} hQ = 83.25/\text{μήνα} = 1000\ \$/\text{έτος}.$$

(c) Υποθέτοντας 25 εργάσιμες μέρες το μήνα η ζήτηση είναι
$a = 50/\text{μήνα} = \frac{50}{25} = 2/\text{ημέρα}$
Επομένως αν η καθυστέρηση παράδοσης είναι $L = 5$ ημέρες τότε το σημείο παραγγελίας είναι
$r = 2 \cdot 5 = 10$, δηλ. όταν πέσει το απόθεμα στις 10 μονάδες προϊόντος.

(d) Υποθέτοντας ότι διατηρείται αμετάβλητη η αρχική πολιτική (όποια είναι αυτή) ως πρός την ποσότητα παραγγελίας κ' τη συχνότητα παραγγελιών, τότε η προσθήκη του αποθέματος ασφαλείας καταργεί την ιδιότητα μηδενικού αποθέματος
Το απόθεμα μεταβάλλεται τώρα ως εξής.



Επομένως η μέση στάθμη τ. αποθέματος αυξάνεται κατά s, κ' το κόστος αποθήκευσης κατά hs ανά μονάδα χρόνου

Για $h=0.33$ και $s=5$ $\Rightarrow$ $hs = 1.67$ \$/μήνα $= 20$ \$/έτος.

14.3-10

Ζήτηση $a = 250/\text{μήνα} = 3000/\text{έτος}$
Σταθ. Κόστος $K = 200$
Κόστος Αγοράς $c = 70$
Κόστος Αποθηκ. $h = (0.20)\cdot 70 + 6 = 20$ /έτος, μονάδα.
Κόστος Ελλειψ. $p = 30$ /μον, έτος

(a) Χωρίς ελλείψεις η πολιτική είναι

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = 245 \qquad T^* = 0.082 \text{ έτη} = 0.98 \text{ μήνες}$$

$$TVC = \sqrt{2Kah} = 4899 \ \$/\text{έτος}$$

(b) Με προγραμματισμένες ελλείψεις.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p+h}{p}} = 316.23 \qquad T^* = \frac{Q^*}{a} = 0.105 \text{ έτη} = 1.26 \text{ μήνες}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}} = 189.74 \qquad W^* = Q^* - S^* = 126.49$$

$$TVC = \frac{Ka}{Q^*} + \frac{hS^{*2}}{2Q^*} + \frac{p(Q^*-S^*)^2}{2Q^*} = 3794 \ \$/\text{έτος}$$

Δηλαδή η βέλτιστη πολιτική είναι να παραγγέλλονται 316 ποδήλατα κάθε φορά. Απ' αυτά τα 190 μπαίνουν σε απόθεμα ενώ τα 126 χρησιμοποιούνται για να καλύψουν εκκρεμότητες.

Το ετήσιο κόστος διαχείρισης είναι 3794, χαμηλότερο από αυτό όταν δεν επιτρέπονται ελλείψεις.

19.3-13 Θεωρούμε γενικά το μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις και την επιπλέον περιορισμό $S=\delta Q$ με $\delta<1$ δοσμένη σταθερά. Το ετήσιο κόστος ως συνάρτηση των S, Q δίνεται από:

$$TC(Q,S) = \alpha C + \frac{K\alpha}{Q} + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

και αντικαθιστώντας $S=\delta Q$ παίρνουμε

$$TC(Q) = \alpha C + \frac{K\alpha}{Q} + \frac{h\delta^2 Q^2}{2Q} + \frac{p(Q-\delta Q)^2}{2Q} =$$

$$= \alpha C + \frac{K\alpha}{Q} + \frac{1}{2} h\delta^2 Q + \frac{1}{2} p(1-\delta)^2 Q$$

$$= \alpha C + \frac{K a}{Q} + \frac{1}{2}\left[h\delta^2 + p(1-\delta)^2\right] Q$$

Παρατηρούμε ότι η έκφραση του κόστους είναι ισοδύναμη μ' αυτή του μοντέλου EOQ χωρίς ελλείψεις και κόστος αποθήκευσης

$\tilde{h} = h\delta^2 + p(1-\delta)^2$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε

τον τύπο για τη βέλτιστη πολιτική παραγγελιών:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{\tilde{h}}} = \sqrt{\frac{2ak}{h\delta^2 + p(1-\delta)^2}}$$

και φυσικά $S=\delta Q^*$ όπως απαιτείται.

19-3-16 Ζήτηση $= \alpha = 365$ / έτος
Σταθ. Κόστος $K = 5$
$h = 0.2\,C.$

$$C = \begin{cases} 4 & \text{αν} \quad Q \le 49 \\ 3.90 & \text{αν} \quad 50 \le Q \le 99 \\ 3.80 & \text{αν} \quad Q \ge 100 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο για το EOQ με εκπτώσεις όγκου βρίσκουμε

1. Υπολογίζουμε τις ποσότητες EOQ για κάθε κατηγορία τιμών:

$$c_1 = 4,\ h_1 = (0.2)\cdot 4 = 0.8,\quad Q_1^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h_1}} = 67.54$$

$$c_2 = 3.9,\ h_2 = (0.2)\cdot 3.9 = 0.78,\quad Q_2^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h_2}} = 68.41$$

$$c_3 = 3.8,\ h_3 = (0.2)\cdot 3.8 = 0.76,\quad Q_3^* = \sqrt{\frac{2\alpha K}{h_3}} = 69.30$$

2. Επειδή $Q_1^* > 49$, $50 \le Q_2^* \le 100$, $Q_3^* < 100$ το μόνο Q_j^* που βρίσκεται εντός της επιτρεπτής περιοχής του είναι το Q_2^*. Το αντίστοιχο κόστος T_2 είναι ίσο με

$$T_2 = \alpha C_2 + \frac{K\alpha}{Q_2^*} + \frac{1}{2} h_2 Q_2^* = 1476.9$$

3. Για τα Q_1^* κ' Q_3^* που δεν βρίσκονται στις αντίστοιχες επιτρεπτές περιοχές υπολογίζουμε τα κόστη ως εξής

Για το C_1 η περιοχή είναι 0-49 κ' η κοντινότερη ποσότητα στο Q_1^* είναι η $Q_1 = 49$. Για την ποσότητα αυτή το κόστος είναι

$$T_1 = \alpha C_1 + \frac{K\alpha}{Q_1} + \frac{1}{2} h_1 Q_1 = 1516.84$$

Για το C_3 η επιτρεπτή περιοχή είναι 100 κ' άνω, και η κοντινότερη ποσότητα στο Q_3^* είναι $Q_3 = 100$. Για την ποσότητα αυτή το κόστος είναι:

$$T_3 = \alpha C_3 + \frac{K\alpha}{Q_3} + \frac{1}{2} h Q_3 = 1443.25$$

4. Το ελάχιστο T_j είναι $\min\{T_1, T_2, T_3\} = T_3 = 1443.25$

και η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας $Q^* = Q_3 = 100$.

Σύμφωνα με την πολιτική αυτή η συχνότητα παραγγελιών είναι ίση με $\frac{\alpha}{Q} = \frac{365}{100} = 3{,}65$ παραγγ/έτος

και ο χρόνος μεταξύ παραγγελιών

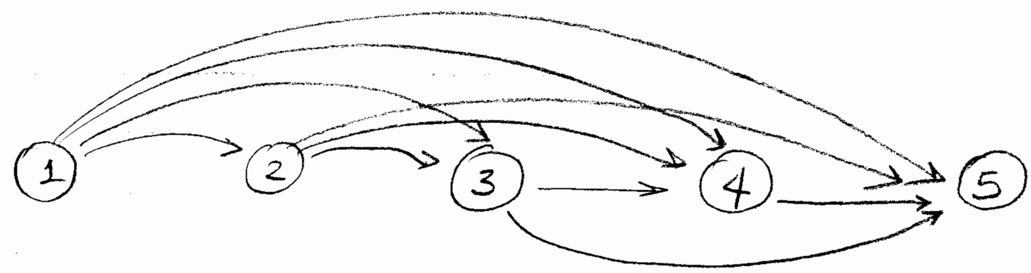
$$\frac{Q}{\alpha} = \frac{100}{365} = 0.274 \text{ έτη} = 100 \text{ ημέρες}$$

19.4 -3 Πρόκειται για πρόβλημα βέλτιστης παραγωγής με ορίζοντα 4 περιόδων όπου η ζήτηση και τα διάφορα κόστη για κάθε περίοδο δίνονται στον παρακάτω πίνακα

περίοδος j	1	2	3	4	
Ζήτηση r_j	3	2	3	2	
Σταθ. κόστος K_j	2	2	2	2	(σε εκατ. \$)
Μοναδ. κόστος παραγ. c_j	1.4	1	1.4	1	(εκατ \$/μονάδα)
Κόστος αποθηκ. h_j	0.2	0.2	0.2	0.2	(εκατ\$/μονάδα)

Τα διάφορα κόστη εμφανίζονται ως εξής. Υποθέτουμε ότι η παραγωγή (αν γίνει) πραγματοποιείται ακαριαία στην αρχή της περιόδου j, και αμέσως μετά ικανοποιείται η ζήτηση r_j. Ενδεχόμενο απόθεμα μεταφέρεται στην αρχή της περιόδου $j+1$, κ' το κόστος αποθήκευσης κατά τη διάρκεια της περιόδου j ισούται με h_j ανά μονάδα.

Με βάση την ιδιότητα μηδενικού αποθέματος, η παραγωγή σε κάθε περίοδο θα πρέπει να ισούται με τη συνολική ζήτηση ενός ακέραιου αριθμού μελλοντικών περιόδων. Επομένως το πρόβλημα μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια του επόμενου δικτύου, όπου κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε μια περίοδο ζήτησης $(j=1,\dots,4)$ ενώ ο τελευταίος το τέλος του προβλήματος. Ένα βέλος από ένα κόμβο i σε ένα κόμβο $j>i$ συμβολίζει την απόφαση στην αρχή της περιόδου i να παραχθεί η συνολική ζήτηση για τις περιόδους $i, i+1, \dots, j-1$, και επομένως να υπάρχει μηδενικό απόθεμα και νέα παραγωγή στην αρχή της περιόδου j (φυσικά αν $j=5$, αυτό



$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$r_1=3$	$r_2=2$	$r_3=3$	$r_4=2$	
$k_1=2$	$k_2=2$	$k_3=2$	$k_4=2$	
$c_1=1.4$	$c_2=1$	$c_3=1.4$	$c_4=1$	
$h_1=0.2$	$h_2=0.2$	$h_3=0.2$	$h_4=0.2$	

σημαίνει ότι παράγεται όλη η ζήτηση για τις περιόδους $i, i+1, \dots, 4$ κ' δεν ξαναγίνεται παραγωγή.

Επομένως το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους παραγωγής-αποθεμάτων μπορεί να παρασταθεί ως πρόβλημα εύρεσης της διαδρομής ελαχίστου κόστους στο δίκτυο, όπου το κόστος κάθε βέλους δίνεται παρακάτω.

$$C_{12} = k_1 + c_1 r_1 = 2 + (1.4)\cdot 3 = 6.2$$

$$C_{13} = k_1 + c_1(r_1+r_2) + h_1 r_2 = 2 + (1.4)\cdot 5 + 0.2 \cdot 2 = 9.4$$

$$C_{14} = k_1 + c_1(r_1+r_2+r_3) + h_1(r_2+r_3) + h_2 r_3 = 14.8$$

$$C_{15} = k_1 + c_1(r_1 + \cdots + r_4) + h_1(r_2+r_3+r_4) + h_2(r_3+r_4) + h_3 r_4 = 18.8$$

$$C_{23} = k_2 + c_2 r_2 = 4$$

$$C_{24} = k_2 + c_2(r_2+r_3) + h_2 r_3 = 7.6$$

$$C_{25} = 10.4$$

$$C_{34} = 6.2, \quad C_{35} = 9.4, \quad C_{45} = 4$$

Για να βρούμε τη διαδρομή ελάχιστου κόστους εφαρμόζουμε δυναμικό προγραμματισμό.

Έστω f_i = κόστος βέλτιστης διαδρομής από κόμβο i μέχρι $N+1$

Εξίσωση βελτιστότητας:

$$f_i = \min_{j=i+1,\dots,N+1} \left\{ c_{ij} + f_j \right\} \qquad i=1,\dots,N$$

Με αναδρομή προς τα πίσω παίρνουμε:

$$f_5 = 0$$

$$f_4 = c_{45} + f_5 = 4$$

$$f_3 = \min \begin{cases} c_{34}+f_4 \\ c_{35}+f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 10.2 \\ 9.4 \end{cases} = 9.4 \qquad x_3^* = 5$$

$$f_2 = \min \begin{cases} c_{23}+f_3 \\ c_{24}+f_4 \\ c_{25}+f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 13.4 \\ 11.6 \\ 10.4 \end{cases} = 10.4 \qquad x_2^* = 5$$

$$f_1 = \min \begin{cases} c_{12}+f_2 \\ c_{13}+f_3 \\ c_{14}+f_4 \\ c_{15}+f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 16.6 \\ 18.8 \\ 18.8 \\ 18.8 \end{cases} = 16.6 \qquad x_1^* = 2$$

Επομένως η βέλτιστη διαδρομή είναι $1 \to 2 \to 5$, δηλ. παραγωγή θα γίνει στις περιόδους 1 και 2. Επομένως οι ποσότητες παραγωγής θα είναι

$$q_1^* = r_1 = 3, \quad q_2^* = r_2 + r_3 + r_4 = 7, \quad q_3^* = q_4^* = 0$$

και το συνολικό κόστος ίσο με 16.6 εκατ. $

19.4-4 Σε αντίθεση με την προηγούμενη άσκηση εδώ δεν ισχύει αναγκαστικά η ιδιότητα μηδενικού αποθέματος.

Ο λόγος είναι ότι το μοναδιαίο κόστος παραγωγής δεν είναι σταθερό. Για παράδειγμα αν το κόστος την περίοδο i είναι πολύ χαμηλό για τις πρώτες 5 μονάδες και η ζήτηση είναι $r_i = 3$, $r_{i+1} = 4$ τότε ενδεχομένως να συμφέρει να παραχθούν 5 μονάδες την περίοδο i να ικανοποιηθεί η ζήτηση r_i, και να μεταφερθούν 2 μονάδες την περίοδο i+1 όπου επίσης θα γίνει η παραγωγή των υπόλοιπων μονάδων.

Χωρίς την ιδιότητα μηδενικού αποθέματος δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο ελάχιστης διαδρομής όπως στην άσκηση 19.4-3. Μπορούμε να εφαρμόσουμε δυναμικό προγραμματισμό αλλά χρησιμοποιώντας ένα γενικότερο μοντέλο όπως φαίνεται παρακάτω.

Η παραγωγή θα γίνει σε 3 (το πολύ) βήματα, επομένως έχουμε ορίζοντα μήκους 4. Η κατάσταση στο βήμα n είναι

s_n = απόθεμα στην αρχή της περιόδου n

Η απόφαση

x_n = ποσότητα παραγωγής την περίοδο n

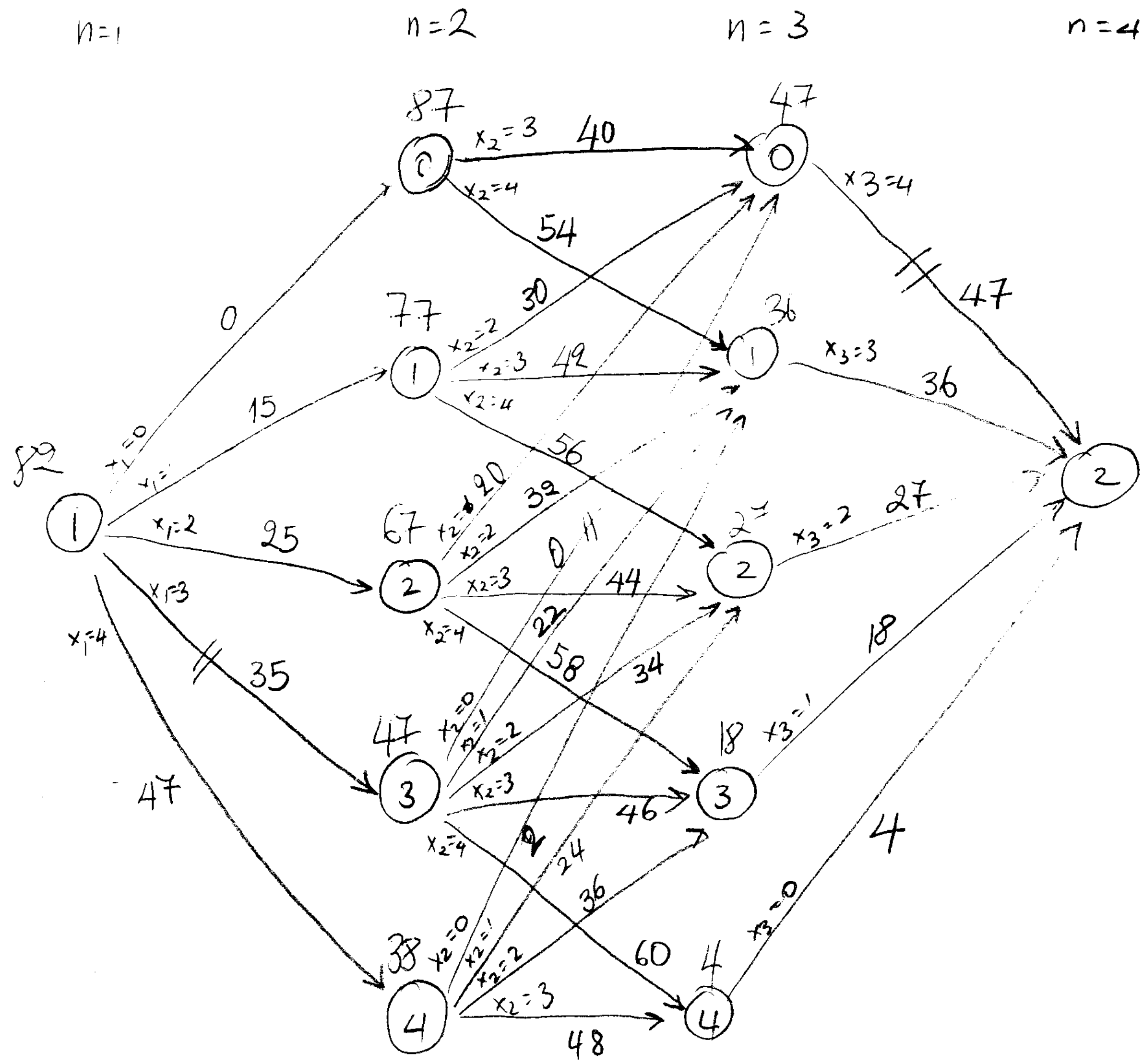
Το κόστος ενός βήματος

$$C(s_n, x_n) = \begin{cases} 0 + 2(s_n - r_n) & , x_n = 0 \\ K_n + c_n x_n + \underbrace{2(x_n - 3)^+}_{\text{υπερωρίες}} + \underbrace{2(x_n + s_n - r_n)}_{\text{αποθήκευση}} & , x_n > 0 \end{cases}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από το γεγονός ότι για όσες μονάδες παραχθούν άνω των 3 στην περίοδο n, υπάρχει επιπλέον κόστος υπερωριών ίσο με 2 ανά μονάδα επιπλέον των 3. Τέλος η δυναμική είναι

$$s_{n+1} = s_n + x_n - r_n$$

Επειδή αρχικά υπάρχει μια μονάδα σε απόθεμα η αρχική κατάσταση είναι $S_1 = 1$.
Επίσης λόγω της απαίτησης για 2 μονάδες αποθέματος στο τέλος, η τελική κατάσταση πρέπει να είναι $S_4 = 2$
Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να σχηματίσουμε το παρακάτω δίκτυο καταστάσεων-αποφάσεων.



Η εξίσωση βελτιστοποίησης είναι $f_n(s_n)=\min\limits_{x_n}\left\{C_n(s_n,x_n)+f_{n+1}(x_n+s_n-r_n)\right\}$

Λύνοντας προς τα πίσω παίρνουμε:

$f_4(S_2)=0$

$f_3(0)=47$, $f_3(1)=36$, $f_3(2)=27$, $f_3(3)=18$, $f_3(4)=4$

$$f_2(0)=\min\begin{cases}40+47\\54+36\end{cases}=87,\quad x_2^*(0)=3$$

$$f_2(1)=\min\begin{cases}30+47\\42+36\\56+27\end{cases}=77,\quad x_2^*(1)=2$$

$$f_2(2)=\min\begin{cases}20+47\\32+36\\44+27\\58+18\end{cases}=67,\quad x_2^*(2)=1$$

$$f_2(3)=\min\begin{cases}0+47\\22+36\\34+27\\46+18\\60+4\end{cases}=47,\quad x_2^*(3)=0$$

$$f_2(4)=\min\begin{cases}2+36\\24+27\\36+18\\48+4\end{cases}=38,\quad x_2^*(4)=0$$

$$f_1(1)=\min\begin{cases}0+87\\15+77\\25+67\\35+47\\47+38\end{cases}=82,\quad x_1^*=3$$

Επομένως η βέλτιστη πολιτική είναι $x_1^*=3$, $x_2^*=0$, $x_3^*=4$

με συνολικό κόστος 82.