

Θεώρημα Stinespring

Θεώρημα 1 (Stinespring). Για κάθε ¹πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ από μια C^* -άλγεβρα \mathcal{A} με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι $*$ -αναπαράσταση της \mathcal{A} στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \rightarrow H_\phi$ είναι φραγμένος τελεστής ώστε

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B}(H) \\ & \searrow \pi & \nearrow \text{ad } V \\ & \mathcal{B}(H_\phi) & \end{array}$$

Αν επιπλέον $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, τότε η V είναι ισομετρία.

Απόδειξη

1. Για να φτιάξουμε τον χώρο Hilbert H_ϕ , θεωρούμε πρώτα τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A} \otimes H$.

Γράφω για συντομία $\tilde{\mathcal{A}}$ αντί για $\mathcal{A} \otimes H$.

[Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes H \simeq \mathcal{A}$.]

2. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_o : \tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$$

ως εξής: θέτουμε $\langle a \otimes \xi, b \otimes \eta \rangle_o := \langle \Phi(b^* a) \xi, \eta \rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$\left\langle \sum_{n=1}^N a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^M b_m \otimes \eta_m \right\rangle_o := \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* a_n) \xi_n, \eta_m \rangle_H.$$

Η $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ είναι καλά ορισμένη και sesquilinear. ²

[Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $\langle a, b \rangle_o = \Phi(b^* a)$.]

3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι για κάθε $\vec{b} = \sum_{n=1}^N b_n \otimes \xi_n \in \tilde{\mathcal{A}}$,

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o = \left\langle \sum_{n=1}^N b_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^N b_m \otimes \xi_m \right\rangle_o \geq 0.$$

¹stineproof23, modified 7 Ιουνίου 2023

²Πράγματι, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.2 από τις [Σημειώσεις στα τανυστικά γινόμενα](#), έχουμε:

Για κάθε $(b, \eta) \in \mathcal{A} \times H$ η απεικόνιση $\mathcal{A} \times H \rightarrow \mathbb{C} : (a, \xi) \mapsto \langle \Phi(b^* a) \xi, \eta \rangle_H$ είναι διγραμμική, άρα έχει μοναδική γραμμική επέκταση $\mathcal{A} \otimes H \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=1}^N a_n \otimes \xi_n \mapsto \sum_n \langle \Phi(b^* a_n) \xi_n, \eta \rangle_H$. Τώρα, για κάθε $\vec{a} = \sum_{n=1}^N a_n \otimes \xi_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ η απεικόνιση $\mathcal{A} \times H \rightarrow \mathbb{C} : (b, \eta) \mapsto \sum_n \langle \eta, \Phi(b^* a_n) \xi_n \rangle_H$ είναι διγραμμική, άρα έχει μοναδική γραμμική επέκταση $\mathcal{A} \otimes H \rightarrow \mathbb{C} :$

$$\sum_{m=1}^M b_m \otimes \eta_m \mapsto \sum_{n,m} \langle \eta_m, \Phi(b_m^* a_n) \xi_n \rangle_H.$$

Πράγματι αν $X := [b_m^* b_n] \in M_N(\mathcal{A})$, έχουμε $[\Phi(b_m^* b_n)] = \Phi_N(X) \in \mathcal{B}(H^N)$ και

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o := \sum_{n,m} \langle b_n \otimes \xi_n, b_m \otimes \xi_m \rangle_o = \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* b_n) \xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi_N(X) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \quad (\dagger)$$

όπου $\vec{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^\dagger$. Όμως ο πίνακας X παραγοντοποιείται

$$X = \begin{bmatrix} b_1^* & 0 & \dots & 0 \\ b_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_N^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = B^* B$$

άρα είναι θετικός, οπότε (αφού η Φ_N είναι θετική απεικόνιση) ο $\Phi_N(X)$ είναι θετικός και άρα $\langle \Phi_N(X) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \geq 0$.

Άρα το $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ είναι ημεισωτερικό γινόμενο. Συνεπώς ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle_o|^2 \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_o$.

Από την Cauchy-Schwarz έπεται ότι

$$\{\vec{u} \in \tilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0\} = \{\vec{u} \in \tilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle_o = 0 \forall \vec{a} \in \tilde{\mathcal{A}}\}$$

και συνεπώς το σύνολο

$$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \tilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0\}$$

είναι γραμμικός χώρος.

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := (\mathcal{A} \otimes H) / \mathcal{N} = \tilde{\mathcal{A}} / \mathcal{N}$. Ο χώρος $H_{0\phi}$ εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο $\langle [\vec{a}], [\vec{b}] \rangle_\phi := \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_o$ (όπου γράφουμε $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$).

Ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_o}$.

[Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $H_{0\phi} = \mathcal{A} / \mathcal{N}$.]

5. Η άλγεβρα \mathcal{A} δρα στον γραμμικό χώρο $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes H$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes \xi) := ab \otimes \xi \quad (a, b \in \mathcal{A}, \xi \in H)$$

$$\text{δηλαδή } \pi_0(a) \left(\sum_n b_n \otimes \xi_n \right) := \sum_n ab_n \otimes \xi_n \quad (a \in \mathcal{A}, \vec{b} = \sum_n b_n \otimes \xi_n \in \tilde{\mathcal{A}}.)$$

[Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $\pi_0(a)(b) = ab$.]

Ισχυρισμός. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b} = \sum_n b_n \otimes \xi_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ έχουμε

$$\langle \pi_0(a) \vec{b}, \pi_0(a) \vec{b} \rangle_o \leq \|a^* a\| \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o.$$

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \pi_0(a) \vec{b}, \pi_0(a) \vec{b} \rangle_o &= \sum_{n,m} \langle ab_n \otimes \xi_n, ab_m \otimes \xi_m \rangle_o \\ &= \sum_{n,m} \langle \Phi((ab_m)^*(ab_n)) \xi_n, \xi_m \rangle_H \\ &= \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* a^* ab_n) \xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi_N(Y) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \end{aligned} \quad (*)$$

όπου $Y = [b_m^* a^* a b_n] \in M_N(\mathcal{A})$, οπότε $[\Phi(b_m^* a^* a b_n)] = \Phi_N(Y) \in \mathcal{B}(H^N)$.

Ο πίνακας Y παραγοντοποιείται

$$Y = \begin{bmatrix} b_1^* & 0 & \dots & 0 \\ b_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_N^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^* a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^* a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} := B^* C B.$$

Παρατηρούμε ότι $Y \leq \|C\| B^* B$.

Πράγματι, αναπαριστώντας την C^* άλγεβρα $M_N(\mathcal{A})$ ως τελεστές που δρουν σ' έναν χώρο Hilbert K (Θεώρημα Gelfand-Naimark),³ για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle B^* C B x, x \rangle = \langle C B x, B x \rangle \leq \|C\| \|B x\|^2 = \|C\| \langle B^* B x, x \rangle = \langle (\|C\| B^* B) x, x \rangle.$$

Εφαρμόζοντας στην ανισότητα $Y \leq \|C\| B^* B$ την θετική απεικόνιση Φ_N , προκύπτει ότι

$$\Phi_N(Y) \leq \|C\| \Phi_N(B^* B).$$

Όμως $C = \text{diag}(a^* a)$ και συνεπώς $\|C\| = \|a^* a\| = \|a\|^2$. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (*) έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \langle \pi_0(a) \vec{b}, \pi_0(a) \vec{b} \rangle_o &= \langle \Phi_N(Y) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \leq \langle \|C\| \Phi_N(B^* B) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \\ &= \|a\|^2 \langle \Phi_N(B^* B) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \stackrel{(\dagger)}{=} \|a\|^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o \end{aligned}$$

και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

6. Από τον ισχυρισμό έπεται ότι $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αν $\vec{u} \in \mathcal{N}$ τότε $0 \leq \langle \pi_0(a) \vec{u}, \pi_0(a) \vec{u} \rangle_o \leq \|a^* a\| \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0$).

Επομένως ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον χώρο πηλίκου $H_\phi = \tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes \xi] : ' = [ab \otimes \xi] \quad (b \in \mathcal{A}, \xi \in H).$$

7. Πάλι από τον Ισχυρισμό έπεται ότι $\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi \leq \|a\| \|\vec{b}\|_\phi$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b} \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Πράγματι,

$$\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi = \|\pi_0(a) \vec{b}\|_o \leq \|a\| \|\vec{b}\|_o = \|a\| \|\vec{b}\|_\phi.$$

Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ .

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi_\phi : a \rightarrow \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\phi).$$

Δείχνουμε ότι η π_ϕ είναι *-αναπαράσταση:

³Άλλος τρόπος: επειδή $0 \leq C \leq \|C\| \mathbf{1}$, θέτοντας $D := (\|C\| \mathbf{1} - C)^{1/2}$ έχουμε $B^*(\|C\| \mathbf{1} - C)B = B^* D^* D B = (DB)^* D B \geq 0$, δηλαδή $B^* \|C\| B \geq B^* C B$.

(α) Έστω $a, a' \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν $b \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$, έχουμε

$$\begin{aligned}\pi_\phi(a + \lambda a')[b \otimes \xi] &= \pi_1(a + \lambda a')[b \otimes \xi] = [((a + \lambda a')b) \otimes \xi] \\ &= [(ab + \lambda a'b) \otimes \xi] = [ab \otimes \xi] + \lambda[a'b \otimes \xi] \\ &= \pi_\phi(a)[b \otimes \xi] + \lambda\pi_\phi(a')[b \otimes \xi] \\ &= (\pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a'))[b \otimes \xi].\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $\vec{b} = [\sum_n b_n \otimes \xi_n] \in \tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$ έχουμε

$$\pi_\phi(a + \lambda a')\vec{b} = (\pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a'))\vec{b}$$

λόγω γραμμικότητας των $\pi_\phi(a + \lambda a')$ και $\pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a')$ και άρα, αφού οι τελεστές αυτοί είναι συνεχείς και ο $H_{0\phi}$ είναι πυκνός στον H_ϕ ,

$$\pi_\phi(a + \lambda a') = \pi_\phi(a) + \lambda\pi_\phi(a').$$

(β) Ομοίως, για να δείξουμε ότι

$$\pi_\phi(aa') = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')$$

για κάθε $a, a' \in \mathcal{A}$, αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα

$$\pi_\phi(aa')[b \otimes \xi] = \pi_\phi(a)(\pi_\phi(a')[b \otimes \xi])$$

για κάθε $b \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$, η οποία ισχύει γιατί

$$\pi_\phi(aa')[b \otimes \xi] = [(aa')b \otimes \xi] = [a(a'b) \otimes \xi] = \pi_\phi(a)[(a'b) \otimes \xi] = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')[b \otimes \xi].$$

(γ) Δείχνουμε τέλος ότι $(\pi_\phi(a))^* = \pi_\phi(a^*)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$:

Αν $b, c \in \mathcal{A}$ και $\xi, \eta \in H$, έχουμε

$$\begin{aligned}\langle (\pi_\phi(a))^*[b \otimes \xi], [c \otimes \eta] \rangle_\phi &= \langle [b \otimes \xi], \pi_\phi(a)[c \otimes \eta] \rangle_\phi = \langle [b \otimes \xi], [ac \otimes \eta] \rangle_\phi \\ &= \langle b \otimes \xi, ac \otimes \eta \rangle_o \\ &= \langle \Phi((ac)^*b)\xi, \eta \rangle_H = \langle \Phi(c^*(a^*b))\xi, \eta \rangle_H \\ &= \langle (a^*b) \otimes \xi, c \otimes \eta \rangle_o = \langle [a^*b \otimes \xi], [c \otimes \eta] \rangle_\phi \\ &= \langle \pi_\phi(a^*)[b \otimes \xi], [c \otimes \eta] \rangle_\phi\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα των $(\pi_\phi(a))^*$ και $\pi_\phi(a^*)$ έπεται ότι για κάθε $[\vec{b}], [\vec{c}] \in \tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$ θα έχουμε

$$\langle (\pi_\phi(a))^*\vec{b}, [\vec{c}] \rangle_\phi = \langle \pi_\phi(a^*)\vec{b}, [\vec{c}] \rangle_\phi$$

και επομένως, λόγω συνέχειας των τελεστών αυτών έπεται ότι θα ταυτίζονται και στον H_ϕ .

8. Ορίζουμε

$$V : H \rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow H_\phi : \xi \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes \xi \rightarrow [\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes \xi].$$

Για κάθε $\xi \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|V\xi\|_{H_\phi}^2 &= \langle [\mathbf{1} \otimes \xi], [\mathbf{1} \otimes \xi] \rangle_\phi \\ &= \langle \Phi(\mathbf{1}^* \mathbf{1})\xi, \xi \rangle_H \\ &\leq \|\Phi(\mathbf{1})\| \|\xi\|_H^2\end{aligned}$$

δηλαδή η V είναι φραγμένη. Αν $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, τότε $\|V\xi\|_{H_\phi}^2 = \langle \xi, \xi \rangle_H$, άρα η V είναι ισομετρία.

Τέλος, για κάθε $\xi, \eta \in H$,

$$\begin{aligned}\langle (V^* \pi(a) V)\xi, \eta \rangle_H &= \langle \pi(a) V\xi, V\eta \rangle_{H_\phi} = \langle \pi(a) [\mathbf{1} \otimes \xi], [\mathbf{1} \otimes \eta] \rangle_{H_\phi} \\ &= \langle [a \otimes \xi], [\mathbf{1} \otimes \eta] \rangle_{H_\phi} = \langle \Phi(\mathbf{1}^* a)\xi, \eta \rangle_H\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$V^* \pi(a) V = \Phi(a). \quad \square$$