Ο χώρος / C* άλγεβρα $C(X,\mathcal{A})$ κι ένα Θεώρημα του Stinespring[1]

Προκαταρκτικά απ' την Τοπολογία /Πραγματική Ανάλυση.

Λήμμα 1. *Έστω X φυσιολογικός (T_4) τοπολογικός χώρος (πχ. συμπαγής Hausdorff ή συμπαγής μετρικός). Αν U_1, U_2 είναι ανοικτά σύνολα με $U_1 \cup U_2 = X$, τότε υπάρχει V_1 ανοιχτό ώστε $V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq U_1$ και $V_1 \cup U_2 = X$.*

Απόδειξη. Έστω $F_1 = U_2^c, F_2 = U_1^c$. Είναι κλειστά σύνολα και $F_2 \cap F_1 = \emptyset$.

Αφού ο X είναι φυσιολογικός, υπάρχουν ανοικτά $V_i \supseteq F_i$ με $V_2 \cap V_1 = \emptyset$. (Στην περίπτωση που ο X είναι συμπαγής μετρικός έχουμε $\text{dist}(F_1,F_2) := \delta > 0$ και μπορούμε να θέσουμε $V_i = \{x \,|\, d(x,F_i) < \delta/2\}$.)

Τώρα, αφού $F_2 \subseteq V_2$ έχουμε $V_2^c \subseteq F_2^c$ οπότε

$$V_1 \subseteq V_2^c \subseteq F_2^c = U_1 \,.$$

Αλλά το V_2^c είναι κλειστό, οπότε αφού $V_1 \subseteq V_2^c$ έχουμε $\overline{V}_1 \subseteq V_2^c$. Συνεπώς

$$V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq U_1 \,.$$

Τέλος, αν $x \notin U_2$ τότε $x \in U_2^c = F_1 \subseteq V_1$. Επομένως

$$V_1 \cup U_2 = X.$$

□

Πρόταση 2 (Shrinking Lemma)**.** *Έστω X φυσιολογικός (T_4) τοπολογικός χώρος (πχ. συμπαγής Hausdorff ή σύμπαγής μετρικός). Αν $\{U_1,\dots,U_n\}$ είναι (πεπερασμένο) ανοικτό κάλυμμα του X, τότε υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{V_1,\dots,V_n\}$ του X με $V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1,\dots n$.*

Απόδειξη. Θέτοντας $W_2 := U_2 \cup \dots \cup U_n$ έχουμε δύο two ανοικτά σύνολα U_1, W_2 με $U_1 \cup W_2 = X$. Από το Λήμμα, υπάρχει V_1 ανοικτό ώστε $V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq U_1$ και $V_1 \cup W_2 = X$. Επομένως το $\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X.

Θέτουμε $W_3 := V_1 \cup U_3 \cup \dots \cup U_n$. Έχουμε δύο two ανοικτά σύνολα U_2, W_3 με $U_2 \cup W_3 = X$. Από το Λήμμα, υπάρχει V_2 ανοικτό ώστε $V_2 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq U_2$ και $V_2 \cup W_3 = X$. Επομένως το $\{V_1, V_2, U_3, \dots, U_n\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μετά από n βήματα έχουμε αντικαταστήσει όλα τα U_i με ανοικτά $V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$ και καταλήγουμε στο επιθυμητό ανοικτό κάλυμμα. □

Θεώρημα 3 (Διαμερίσεις της μονάδας)**.** *Έστω X φυσιολογικός (T_4) τοπολογικός χώρος (πχ. συμπαγής Hausdorff ή συμπαγής μετρικός) και $U_1,\dots,U_k$ ανοικτά υποσύνολα του X με $X = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Τότε υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : X \to [0,1],\ i = 1,\dots,k$ με $\text{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1,\dots,k$ και $\phi_1(x) + \dots + \phi_k(x) = 1$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $V_i,\ i = 1,\dots,k$ ώστε $\overline{V}_i \subseteq U_i$ και $X = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Για τον ίδιο λόγο υπάρχουν ανοικτά σύνολα $W_i,\ i = 1,\dots,k$ ώστε $\overline{W}_i \subseteq V_i$ για κάθε $i = 1,\dots,k$ και $X = \bigcup_{i=1}^k W_i$.

Από το Λήμμα Urysohn, για κάθε $i = 1,\dots,k$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_i : X \to [0,1]$ ώστε $f_i(x) = 1$ όταν $x \in \overline{W}_i$ και $f_i(x) = 0$ όταν $x \notin V_i$. Παρατηρούμε ότι:

1. $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) > 0$ για κάθε $x \in X$, γιατί $X = W_1 \cup \dots \cup W_k$ οπότε $x \in W_i$ για κάποιο $i = 1,\dots,k$ άρα $f_i(x) = 1$.

[1]Ευχαριστίες στους Μ.Μ. και Α.Χ.

2. $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, γιατί αν το $x \in X$ ικανοποιεί $f_i(x) \neq 0$ τότε $x \in V_i$. Επομένως,
$$\operatorname{supp}(f_i) = \overline{\{x : f_i(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i \,.$$

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ with $\phi_i = \frac{f_i}{f_1 + \cdots + f_k}$. Είναι καλά ορισμένες και $\operatorname{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ (εξηγείστε γιατί). Τέλος, $\sum\limits_{i=1}^{k} \phi_i(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. □

Ο χώρος / C* άλγεβρα $C(X, \mathcal{A})$. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff (π.χ. συμπαγής μετρικός) και $\mathcal{A}$ χώρος Banach. Ονομάζουμε $C(X, \mathcal{A})$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathcal{A}$.

Για κάθε $f \in C(X, \mathcal{A})$ η συνάρτηση $X \to \mathbb{R} : x \mapsto \|f(x)\|_{\mathcal{A}}$ είναι συνεχής σε συμπαγές, συνεπώς φραγμένη, άρα $\sup\{\|f(x)\|_{\mathcal{A}} : x \in X\} < \infty$. Εύκολα φαίνεται ότι η
$$f \mapsto \|f\|_{\mathcal{A},\infty} := \sup\{\|f(x)\|_{\mathcal{A}} : x \in X\}$$
είναι νόρμα στον $C(X, \mathcal{A})$. Όπως στην Πραγματική Ανάλυση, αποδεικνύεται ότι ο $(C(X, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A},\infty})$ είναι χώρος Banach: χρησιμοποιεί κανείς ότι μια ομοιόμορφα βασική ακολουθία, που παίρνει τιμές σε πλήρη μετρικό χώρο, συγκλίνει ομοιόμορφα, και ότι το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Αν η $\mathcal{A}$ είναι C* άλγεβρα, εύκολα φαίνεται ότι η $C(X, \mathcal{A})$ γίνεται *-άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο $((fg)(x) := f(x)g(x),\ f^*(x) := (f(x))^*)$ και ότι $\|fg\|_{\mathcal{A},\infty} \leqslant \|f\|_{\mathcal{A},\infty}\|g\|_{\mathcal{A},\infty}$ και $\|f^*f\|_{\mathcal{A},\infty} = \|f\|^2_{\mathcal{A},\infty}$. Δηλαδή η $C(X, \mathcal{A})$ είναι τότε C*-άλγεβρα.

Θεώρημα 4. *Υπάρχει μια γραμμική και 1-1 απεικόνιση*
$$\Phi : C(X) \otimes \mathcal{A} \to C(X, \mathcal{A}) \quad \textit{με} \quad f \otimes a \mapsto f(\cdot)a \,.$$
Η εικόνα $\Phi(C(X) \otimes \mathcal{A})$ είναι πυκνή στον $C(X, \mathcal{A})$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση
$$C(X) \times \mathcal{A} \to C(X, \mathcal{A}) : (f, a) \mapsto f(\cdot)a$$
(όπου $f(\cdot)a$ είναι η συνάρτηση $x \to \mathcal{A} : x \mapsto f(x)a$) είναι προφανώς διγραμμική, επομένως επάγει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση
$$\Phi : C(X) \otimes \mathcal{A} \to C(X, \mathcal{A}) : f \otimes a \mapsto f(\cdot)a$$
από την καθολική ιδιότητα του (αλγεβρικού) τανυστικού γινομένου.

Ισχυρισμός: Η Φ είναι 1-1.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $u \in C(X) \otimes \mathcal{A}$ με $\Phi(u) = 0$. Δείχνουμε ότι $u = 0$:

Μπορούμε να γράψουμε το u στη μορφή $u = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \otimes a_k$ με τα $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathcal{A}$ γραμμικά ανεξάρτητα. Εφόσον $\Phi(u) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\cdot)a_k = 0$, για κάθε $x \in X$ έχουμε $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)a_k = 0$. Αλλά τα $\{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επομένως οι συντελεστές $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ είναι όλοι μηδέν, για κάθε $x \in X$. Συνεπώς οι συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_n$ μηδενίζονται όλες και άρα $u = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \otimes a_k = 0$ όπως θέλαμε.

Ισχυρισμός: Η εικόνα $\Phi(C(X) \otimes \mathcal{A})$ είναι $\|\cdot\|_{\mathcal{A},\infty}$-πυκνή στον $C(X, \mathcal{A})$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $F \in C(X, \mathcal{A})$. Θέλουμε να προσεγγίσουμε την F με συναρτήσεις $G \in \Phi(C(X) \otimes \mathcal{A})$, δηλ. της μορφής $G = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(\cdot)a_k$, όπου $g_k \in C(X)$ και $a_k \in \mathcal{A}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Για κάθε $x \in X$, από τη συνέχεια της F στο x υπάρχει ανοικτή περιοχή V_x του x ώστε η F να είναι «σχεδόν σταθερή» στο V_x. Ακριβέστερα,

$$y \in V_x \quad \Rightarrow \quad \|F(y) - F(x)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon\,.$$

Η οικογένεια $\{V_x : x \in X\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου X, επομένως υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{V_{x_1}, \dots V_{x_n}\}$. Γράφοντας $V_k := V_{x_k}$ και $a_k := F(x_k) \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$y \in V_k \quad \Rightarrow \quad \|F(y) - a_k\|_{\mathcal{A}} = \|F(y) - F(x_k)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon\,. \tag{*}$$

Έστω $\{g_1, \dots, g_n\}$ διαμέριση της μονάδας που αντιστοιχεί στο ανοικτό κάλυμμα $\{V_1, \dots V_n\}$ (Θεώρημα 3): οι $g_k : X \to [0,1],\ k = 1, \dots, n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με $\text{supp}(g_k) \subseteq V_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ και $g_1(x) + \dots + g_n(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. Παρατηρούμε τότε ότι για κάθε $k \in [n]$,

$$\text{για κάθε } x \in X, \text{ αν } g_k(x) > 0 \text{ τότε } \quad \|F(x) - a_k\|_{\mathcal{A}} < \epsilon\,. \tag{**}$$

Πράγματι, αν $g_k(x) > 0$ τότε $x \in V_k$ οπότε $\|F(x) - a_k\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$ από την $(*)$.

Ισχυρισμός: Θέτουμε $G(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x) a_k$. Για κάθε $x \in X$,

$$\|F(x) - G(x)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon\,.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Για κάθε $x \in X$, εφόσον $\sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x) = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|F(x) - G(x)\|_{\mathcal{A}} &= \| \left(\sum_{k=1}^{n} g_k(x) \right) F(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) a_k \|_{\mathcal{A}} \\
&= \| \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \left(F(x) - a_k \right) \|_{\mathcal{A}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \|F(x) - a_k\|_{\mathcal{A}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \epsilon < \epsilon
\end{aligned}$$

από την $(**)$.

Δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $G_\epsilon(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x) a_k$ όπου $g_k \in C(X)$ και $a_k \in \mathcal{A}$, δηλαδή $G_\epsilon \in \Phi(C(X) \otimes \mathcal{A})$, ώστε $\|F - G_\epsilon\|_{\mathcal{A},\infty} = \sup\limits_{x \in X} \|F(x) - G(x)_\epsilon\|_{\mathcal{A}} \leqslant \epsilon\,.$ □

Εφαρμογη

Θεώρημα 5 (Stinespring). *Αν $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ειναι μια θετικη γραμμικη απεικονιση μεταξυ C^*-αλγεβρων με μοναδα* με την $\mathcal{C}$ μεταθετικη, *τοτε η Φ ειναι πληρως θετικη.*

Απόδειξη. By Gelfand, we may take $\mathcal{C} = C(X)$ where X is compact Hausdorff. Given any $n \in \mathbb{N}$, we have to prove that the map

$$\Phi^n : M_n(\mathcal{C}) \to M_n(\mathcal{B})$$

is positive.

Observe that the C* algebra $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ can be identified with $M_n(\mathcal{C}) \simeq C(X) \otimes M_n$ by considering each continuous function $F : X \to M_n(\mathbb{C})$ as defining an $n \times n$ matrix $[f_{ij}]$ of continuous functions $X \to \mathbb{C}$ given by $x \mapsto f_{ij}(x) := \langle F(x)e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]}$, i.e. via the map

$$C(X, M_n(\mathbb{C})) \to C(X) \otimes M_n : F \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\cdot) \otimes E_{ij}$$

whose inverse satisfies

$$C(X) \otimes M_n \to C(X, M_n(\mathbb{C})) : f \otimes [u_{ij}] \mapsto f(\cdot)[u_{ij}]$$

(in other words, we consider an element $F \in M_n(C(X))$ as a continuous function $F : X \to M_n(\mathbb{C})$).

Given a positive $F \in C(X, M_n)$ we need to prove that $\Phi^n(F) \in M_n(\mathcal{B})$ is positive.

Observe that positivity of $F \in C(X, M_n)$ means $F(x) \in M_n(\mathbb{C})_+$ for all $x \in X$ (γιατι;).

By the proof of the last Theorem, given $\epsilon > 0$ we can find $x_1, \ldots, x_n$ in X and continuous functions $g_i : X \to [0, 1]$ such that

$$\|F(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x)F_k\|_{M_n} < \epsilon \quad \text{uniformly in } \ x \in X$$

where $F_k := F(x_k) \in M_n(\mathbb{C})$ are positive matrices. In other words

$$\|F(\cdot) - \sum_{k=1}^{n} g_k(\cdot)F_k\|_{M_n(C(X))} \leqslant \epsilon$$

where the norm in $M_n(C(X)) \simeq C(X; M_n)$ is given by $\|F\|_{M_n(C(X))} = \sup_{x \in X} \|F(x)\|_{M_n}$.

Now recall (exercise!) that since Φ is positive, it is bounded, and since Φ is bounded, Φ^n is bounded - a priori with a possibly larger norm (exercise!). Therefore we have

$$\|\Phi^n(F) - \sum_{k=1}^{n} \Phi^n(g_kF_k)\|_{M_n\mathcal{B})} \leqslant \epsilon\|\Phi^n\|$$

If we can show that each $\Phi^n(g_kF_k)$ is a positive element of $M_n(\mathcal{B})$ we will be done, because we will have shown that $\Phi^n(F)$ is the limit (in the norm of $M_n(\mathcal{B})$) of (finite sums of) positive elements, and hence is positive (because the positive elements of any C* algebra form a (norm-) closed cone).

It thus remains to prove that $\Phi^n(g_kF_k)$ is a positive element of $M_n(\mathcal{B})$. Now identifying g_kF_k with $g_k \otimes F_k \in C(X) \otimes M_n$ and $\Phi^n : M_n(\mathcal{C}) \to M_n(\mathcal{B})$ with $\Phi \otimes \mathrm{id} : \mathcal{C} \otimes M_n \to \mathcal{B} \otimes M_n$ we see that

$$\Phi^n(g_k \otimes F_k) = \Phi(g_k) \otimes F_k\,.$$

But $g_k \in \mathcal{C}_+$ and Φ is a positive linear map by assumption, so $\Phi(g_k) \in \mathcal{B}_+$. Also $F_k \in M_n(\mathbb{C})_+$ by construction, so the tensor product $\Phi(g_k) \otimes F_k$ is in $(\mathcal{B} \otimes M_n)_+$ (if $\Phi(g_k) = b^*b$ for some $b \in \mathcal{B}$ and $F_k = A^*A$ for some $A \in M_n$ then $\Phi(g_k) \otimes F_k = (b \otimes A)^*(b \otimes A)$ which is positive since $\mathcal{B} \otimes M_n$ is a C*-algebra).

Alternative argument: Write $F_k = [a_{ij}]$ where each $a_{ij} \in \mathbb{C}$ and recall that g_k is a nonnegative function. Then

$$\Phi^n(g_kF_k) = [\Phi(g_ka_{ij})]) = [\Phi(g_k)a_{ij}]$$

(since $a_{ij} \in \mathbb{C}$ and $g_k \in C(X)$ we have $\Phi(g_ka_{ij}) = a_{ij}\Phi(g_k)$ by linearity of Φ).

But now $\Phi(g_k) := b \in \mathcal{B}_+$ since $g_k \geqslant 0$ and Φ is positive, and $[a_{ij}]$ is a positive scalar matrix. So, identifying the scalar matrix $[a_{ij}]$ with the matrix $[a_{ij}\mathbf{1}] \in M_n(\mathcal{B})$ (we may assume that $\mathcal{B}$ is unital, passing to the unitisation if needed) we have the factorization

$$\Phi^n(g_kF_k) = [ba_{ij}] = \mathrm{diag}(\sqrt{b})[a_{ij}]\mathrm{diag}(\sqrt{b})$$

we conclude, since $[a_{ij}]$ is positive, that $\Phi^n(g_kF_k) \in M_n(\mathcal{B})_+$, as required . $\square$