ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13-Ε.20)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV

Για τους αναγκαιους ορισμους και συμβολισμους, δειτε τις διαφανειες.

Άσκηση 1. Έστω V ένα σύστημα τελεστών. Δείξτε ότι

(1) Αν $a \in V_{sa}$, τοτε $-\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \mathbf{1}$ αν και μόνον αν $\|a\| \leqslant 1$.

(2) Αν $a \in V$, το $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & a \\ a^* & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ είναι θετικό αν και μόνον αν $\|a\| \leqslant 1$.

(3) Έστω $a \in V$ και $p \in V^+$. Αν το $\left[\begin{smallmatrix} p & a \\ a^* & p \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ είναι θετικό, τότε $\|a\| \leqslant \|p\|$.

Να συμπερανετε οτι η νορμα καθοριζεται απο την διαταξη πινακων, με την εννοια οτι για καθε $a \in V$,

$$\|a\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \left[\begin{smallmatrix} \lambda\mathbf{1} & a \\ a^* & \lambda\mathbf{1} \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)_+\right\}$$

Άσκηση 2. Έστω V ένα σύστημα τελεστών. Αν $a \in M_{nk}(\mathbb{C})$ οριζουμε την απεικονιση

$$\mathrm{ad}(a) : M_n(V) \to M_k(V) : v \mapsto a^* v a.$$

Δειξτε οτι η $\mathrm{ad}(a)$ ειναι καλα ορισμενη γραμμικη απεικονιση που απεικονιζει τον θετικο κωνο του $M_n(V)$ (μεσα) στον θετικο κωνο του $M_k(V)$.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι καθε θετικη γραμμικη απεικονιση $\phi : V \to \mathcal{B}$ απο ενα συστημα τελεστων V σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{B}$ ειναι φραγμενη.

Άσκηση 4. *(α)* Αν $[a_{ij}]$ ειναι $n \times n$ πινακας στοιχειων μιας C^* -αλγεβρας $\mathcal{A}$, τοτε

$$\|[a_{ij}]\|_{M_n(\mathcal{A})} \leqslant \|[\|a_{ij}\|]\|_{M_n(\mathbb{C})} \leqslant \left(\sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{\mathcal{A}}^2\right)^{1/2} \leqslant n \|[a_{ij}]\|_{M_n(\mathcal{A})}$$

(β) Αν V ειναι ενας χωρος τελεστων, $\mathcal{B}$ μια C^* -αλγεβρα και $\phi : V \to \mathcal{B}$ γραμμικη και φραγμενη, τοτε η ϕ^n ειναι φραγμενη, μαλιστα

$$\|\phi^n : M_n(V) \to M_n(\mathcal{B})\| \leqslant n \|\phi : V \to \mathcal{B}\| .$$

Άσκηση 5. Έστω K και L συμπαγείς, Hausdorff τοπολογικοί χώροι και $C(K)$, $C(L)$ οι άλγεβρες των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων απο τους K και L αντίστοιχα, με πράξεις κατά σημείο και νόρμες supremum. Δείξτε ότι ο χώρος $C(K) \otimes C(L)$ είναι πυκνός στον $C(K \times L)$.

Άσκηση 6 (Schmidt Decomposition)**.** *Έστω H και K δύο χώροι Hilbert και $u \in H \otimes K$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, ορθοκανονικά σύνολα $\{e_k : k = 1, \ldots, N\} \subseteq H$, $\{f_k : k = 1, \ldots, N\} \subseteq K$ και θετικοί αριθμοί $\{s_k : k = 1, \ldots, N\}$ έτσι ώστε*

$$u = \sum_{k=1}^{N} s_k e_k \otimes f_k$$

και $\|u\|_{hs}^2 = \sum_{k=1}^{N} s_k^2$.