

## Η Αναπαράσταση GNS

**Θεώρημα 1** (Gelfand, Naimark, Segal). Για κάθε κατάσταση  $\omega$  σε μια  $C^*$  άλγεβρα  $\mathcal{A}$  με μονάδα υπάρχει μια τριάδα  $(\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$  όπου  $\pi_\omega$  είναι αναπαράσταση της  $\mathcal{A}$  στον χώρο Hilbert  $H_\omega$  και  $\xi_\omega \in H_\omega$  ένα κυκλικό<sup>1</sup> μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\omega(a) = \langle \pi_\omega(a)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS  $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \xi_\omega)$  καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

**Λήμμα 2.** Αν  $\omega$  είναι θετική γραμμική μορφή στην  $\mathcal{A}$ ,

$$\omega(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \omega(b^*b), \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. Αρκεί να υποθέσουμε ότι  $\|a\| \leq 1$  και να δείξουμε ότι  $\omega(b^*a^*ab) \leq \omega(b^*b)$ .

Αφού  $\|a^*a\| \leq 1$ , έχουμε  $\mathbf{1} - a^*a \geq 0$ . Πράγματι, το  $\mathbf{1} - a^*a$  είναι αυτοσυζυγές και  $\sigma(a^*a) \subseteq [0, 1]$  άρα  $\sigma(\mathbf{1} - a^*a) = \{1 - \lambda : \lambda \in \sigma(a^*a)\} \subseteq [0, 1]$ .

Συνεπώς το  $\mathbf{1} - a^*a$  έχει θετική τετραγωνική ρίζα  $x := (\mathbf{1} - a^*a)^{1/2}$ .

Έπεται ότι για κάθε  $b \in \mathcal{A}$  ισχύει ότι  $b^*b - b^*a^*ab \geq 0$ . Πράγματι,

$$b^*b - b^*a^*ab = b^*(\mathbf{1} - a^*a)b = b^*x^2b = (xb)^*(xb) \geq 0.$$

Αφού η  $\omega$  είναι θετική έχουμε  $\omega(b^*b - b^*a^*ab) \geq 0$  δηλαδή  $\omega(b^*a^*ab) \leq \omega(b^*b)$ . □

Απόδειξη του Θεωρήματος

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο  $\mathcal{A}$ .

2. Ορίζουμε  $\langle a, b \rangle_0 := \omega(b^*a)$ ,  $a, b \in \mathcal{A}$ .

Το  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  είναι προφανώς sesquilinear μορφή, και (αφού η  $\omega$  είναι θετική) ικανοποιεί

$$\langle b, a \rangle_0 = \omega(a^*b) = \overline{\omega(b^*a)} = \overline{\langle a, b \rangle_0} \quad \text{και} \quad \langle a, a \rangle_0 := \omega(a^*a) \geq 0 \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathcal{A}.$$

Είναι λοιπόν ημι-εσωτερικό γινόμενο στον γραμμικό χώρο  $\mathcal{A}$ .

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz για την  $\omega$  γράφεται  $|\langle a, b \rangle_0|^2 \leq \langle a, a \rangle_0 \langle b, b \rangle_0$ .

3. Θέτουμε

$$\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} : \langle u, u \rangle_0 = 0\}.$$

Ισχύει η ισότητα

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{A} : \langle u, a \rangle_0 = 0 \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A}\} \quad (*)$$

και συνεπώς το  $\mathcal{N}$  είναι γραμμικός υπόχωρος του  $\mathcal{A}$ .

---

<sup>1</sup>δηλ. τέτοιο ώστε το  $\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$  να είναι πυκνό στον  $H_\omega$ .

Πράγματι, αν  $\langle u, a \rangle_0 = 0$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ , τότε βέβαια  $\langle u, u \rangle_0 = 0$ . Αντίστροφα, αν  $\langle u, u \rangle_0 = 0$ , τότε λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwarz για κάθε  $a \in \mathcal{A}$  έχουμε  $|\langle u, a \rangle_0|^2 \leq \langle u, u \rangle_0 \langle a, a \rangle_0 = 0$  άρα  $\langle u, a \rangle_0 = 0$ .

4. Θέτουμε  $H_{0\omega} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$ . Παρατηρούμε ότι το ημι-εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  επάγει ένα εσωτερικό γινόμενο στον  $H_{0\omega}$ :

$$\langle [a], [b] \rangle_\omega := \langle a, b \rangle_0, \quad \text{για κάθε } [a] = a + \mathcal{N}, [b] = b + \mathcal{N} \text{ στον } \mathcal{A}/\mathcal{N}.$$

Ονομάζουμε λοιπόν  $H_\omega$  την πλήρωση του  $H_{0\omega}$  ως προς την  $\|[u]\|_\omega := \sqrt{\langle [u], [u] \rangle_\omega}$ . Καταχρηστικά χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για το εσωτερικό γινόμενο στον  $H_\omega$ .

Πράγματι, η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη: αν  $[a] = [a_1]$  και  $[b] = [b_1]$ , δηλαδή  $a_1 - a = u \in \mathcal{N}$  και  $b_1 - b = v \in \mathcal{N}$  τότε

$$\langle [a_1], [b_1] \rangle_\omega = \langle a + u, b + v \rangle_0 = \langle a, b \rangle_0 + \langle u, b \rangle_0 + \langle a + u, v \rangle_0 = \langle a, b \rangle_0 = \langle [a], [b] \rangle_\omega$$

από το βήμα (3), εφόσον  $u, v \in \mathcal{N}$ . Το  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  είναι προφανώς ημι-εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ . Επιπλέον, αν  $\langle [a], [a] \rangle_\omega = 0$  τότε  $\langle a, a \rangle_0 = 0$ , δηλαδή  $a \in \mathcal{N}$  άρα  $[a] = [0]$ . Συνεπώς το  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  είναι εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathcal{A}/\mathcal{N}$  και άρα η επαγόμενη  $\|[u]\|_\omega := \sqrt{\langle [u], [u] \rangle_\omega}$  είναι νόρμα στον  $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ .

Θα ορίσουμε τώρα δράση της  $\mathcal{A}$  στον  $H_\omega$ .

5. Η  $\mathcal{A}$  δρα στον γραμμικό χώρο  $\mathcal{A}$  με την λεγόμενη κανονική αριστερή αναπαράσταση  $\pi_0$  που ορίζεται ως εξής: για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ , η απεικόνιση  $\pi_0(a) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  είναι η  $\pi_0(a)(b) = ab, b \in \mathcal{A}$ .
6. Αν  $a \in \mathcal{A}$ , η απεικόνιση

$$\pi_1(a) : H_{0\omega} \rightarrow H_{0\omega} : [b] \mapsto [ab]$$

είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση στον  $H_{0\omega} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ , διότι  $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$  (δηλαδή το  $\mathcal{N}$  είναι αριστερό ιδεώδες της  $\mathcal{A}$ ).

Πράγματι, για κάθε  $u \in \mathcal{N}$ , έχουμε  $\pi_0(a)(u) = au \in \mathcal{N}$  διότι για κάθε  $b \in \mathcal{A}$  έχουμε  $\langle au, b \rangle_0 = \omega(b^*au) = \omega((a^*b)^*u) = \langle u, a^*b \rangle_0 = 0$ , οπότε  $au \in \mathcal{N}$  από τη σχέση (\*) στο βήμα (3).

Επομένως αν  $[b] = [b_1]$ , δηλαδή  $b_1 - b = u \in \mathcal{N}$ , έχουμε  $ab_1 - ab = au \in \mathcal{N}$ , άρα  $[ab] = [ab_1]$ .

7. Για κάθε  $a \in \mathcal{A}$  και κάθε  $[b] \in H_{0\omega}$  έχουμε

$$\|\pi_1(a)([b])\|_\omega \leq \|a\| \| [b] \|_\omega .$$

Πράγματι,  $\|\pi_1(a)([b])\|_\omega^2 = \|[ab]\|_\omega^2 = \omega(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \omega(b^*b) = \|a\|^2 \|[b]\|_\omega^2$  από το Λήμμα 2.

Έπεται ότι ο  $\pi_1(a)$  επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή  $\pi_\omega(a) : H_\omega \rightarrow H_\omega$ .

Είναι τώρα εύκολο να δείξει κανείς ότι η απεικόνιση

$$\pi_\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_\omega) : a \mapsto \pi_\omega(a)$$

είναι \*-αναπαράσταση.

*Απόδειξη* Αν  $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ , για να δείξουμε τις ισότητες  $\pi_\omega(a_1 + \lambda a_2) = \pi_\omega(a_1) + \lambda \pi_\omega(a_2)$  και  $\pi_\omega(a_1 a_2) = \pi_\omega(a_1) \pi_\omega(a_2)$ , επειδή είναι ισότητες φραγμένων τελεστών, αρκεί να τις ελέγξουμε σε κάθε σημείο  $[b]$  του πυκνού υποχώρου  $H_{0\omega}$ . Από τον ορισμό των πράξεων στον χώρο πηλίκο  $H_{0\omega} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ , έχουμε  $[a_1 b + \lambda a_2 b] = [a_1 b] + \lambda [a_2 b]$  και συνεπώς

$$\begin{aligned} \pi_\omega(a_1 + \lambda a_2)[b] &= \pi_1(a_1 + \lambda a_2)[b] = [(a_1 + \lambda a_2)b] = [a_1 b] + \lambda [a_2 b] \\ &= \pi_\omega(a_1)[b] + \lambda \pi_\omega(a_2)[b] = (\pi_\omega(a_1) + \lambda \pi_\omega(a_2))[b]. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \pi_\omega(a_1 a_2)[b] &= \pi_1(a_1 a_2)[b] = [(a_1 a_2)b] = [a_1(a_2 b)] \\ &= \pi_\omega(a_1)[a_2 b] = \pi_\omega(a_1)(\pi_\omega(a_2)[b]) = (\pi_\omega(a_1) \pi_\omega(a_2))[b]. \end{aligned}$$

Τέλος, αν  $a \in \mathcal{A}$  και  $[b], [c] \in H_{0\omega}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \pi_\omega(a)^*[b], [c] \rangle_\omega &= \langle [b], \pi_\omega(a)[c] \rangle_\omega = \langle [b], [ac] \rangle_\omega \\ &= \omega((ac)^*b) = \omega(c^*a^*b) = \langle [a^*b], [c] \rangle_\omega = \langle \pi_\omega(a^*)[b], [c] \rangle_\omega \end{aligned}$$

συνεπώς  $\pi_\omega(a)^*[b] = \pi_\omega(a^*)[b]$  και άρα  $\pi_\omega(a)^* = \pi_\omega(a^*)$ .

8. Θέτουμε  $\xi_\omega = [1_{\mathcal{A}}]$ . Το  $\xi_\omega$  είναι κυκλικό διάνυσμα για την  $\pi_\omega$  γιατί

$$\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega = \{\pi_\omega(a)[1] : a \in \mathcal{A}\} = \{[a] : a \in \mathcal{A}\} = H_{0\omega}$$

που είναι πυκνός υποχώρος του  $H_\omega$ . Τέλος, για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \pi_\omega(a)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle_\omega &= \langle \pi_\omega(a)[1], [1] \rangle_\omega \\ &= \langle a, 1 \rangle_\omega = \omega(1^*a) = \omega(a). \quad \square \end{aligned}$$

**Πρόταση 3** («Μοναδικότητα»). Έστω  $\mathcal{A}$  μια  $C^*$  άλγεβρα με μονάδα και  $\omega$  κατάσταση στην  $\mathcal{A}$ . Αν  $(\pi, H, \xi)$  είναι αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα  $\xi$  ώστε

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \omega(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A},$$

τότε η  $(\pi, H, \xi)$  είναι unitarily ισοδύναμη με την  $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \xi_\omega)$ : Υπάρχει μια επί ισομετρία  $U : H_\omega \rightarrow H$  που ικανοποιεί

$$\pi(a) = U \pi_\omega(a) U^* \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A} \quad \text{και } U \xi_\omega = \xi.$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|\pi(a)\xi\|_H^2 &= \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \omega(a^*a) = \langle \pi_\omega(a^*a)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle = \\ &= \langle \pi_\omega(a)\xi, \pi_\omega(a)\xi \rangle = \|\pi_\omega(a)\xi_\omega\|_{H_\omega}^2. \end{aligned}$$

Επομένως η απεικόνιση

$$U_0 : \pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega \rightarrow \pi(\mathcal{A})\xi : \pi_\omega(a)\xi_\omega \mapsto \pi(a)\xi, \quad a \in \mathcal{A}$$

είναι καλά ορισμένη (αν  $\pi(a)\xi = \pi(b)\xi$  τότε  $\pi(a-b)\xi = 0$  άρα  $\pi_\omega(a-b)\xi_\omega = 0$  άρα  $\pi_\omega(a)\xi_\omega = \pi_\omega(b)\xi_\omega$ ), είναι προφανώς γραμμική, και είναι ισομετρική. Επεκτείνεται λοιπόν σε μια γραμμική ισομετρία  $U$  από την κλειστή θήκη  $H_\omega$  του  $(\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega, \|\cdot\|_{H_\omega})$  στην κλειστή θήκη  $H$  του  $(\pi(\mathcal{A})\xi, \|\cdot\|_H)$ .<sup>2</sup> Το σύνολο τιμών της είναι κλειστό (αφου η  $U$  είναι ισομετρία) και περιέχει τον πυκνό υπόχωρο  $\pi(\mathcal{A})\xi$  του  $H$ , άρα η  $U$  είναι επί του  $H$ . Επομένως ο  $U$  είναι αντιστρέψιμος και  $U^{-1} = U^*$ .

Επίσης, θέτοντας  $a = \mathbf{1} \in \mathcal{A}$  στον ορισμό της  $U_0$ , έχουμε

$$U\xi_\omega = U\pi_\omega(\mathbf{1})\xi_\omega = \pi(\mathbf{1})\xi = \xi.$$

Τέλος, για να δείξουμε ότι  $\pi(a) = U\pi_\omega(a)U^*$ , ισοδύναμα  $\pi(a)U = U\pi_\omega(a)$  για κάθε  $a \in \mathcal{A}$ , αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα στον πυκνό υπόχωρο  $\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$ . Έστω λοιπόν  $x = \pi_\omega(b)\xi_\omega \in \pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$ . Τότε

$$\begin{aligned} \pi(a)U(\pi_\omega(b)\xi_\omega) &= \pi(a)(\pi(b)\xi) = \pi(ab)\xi = U(\pi_\omega(ab)\xi_\omega) = U\pi_\omega(a)(\pi_\omega(b)\xi_\omega) \\ \text{δηλαδή} \quad \pi(a)U(x) &= U\pi_\omega(a)(x). \end{aligned}$$

Αφού οι φραγμένοι τελεστές  $\pi(a)U$  και  $U\pi_\omega(a)$  ταυτίζονται στο πυκνό υποσύνολο  $\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$ , είναι ίσοι:

$$\begin{array}{ccc} H_\omega & \xrightarrow{U} & H \\ \pi_\omega(a) \downarrow & & \downarrow \pi(a) \\ H_\omega & \xrightarrow{U} & H \end{array}$$

□

**Πόρισμα 4.** Έστω  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$  μια  $C^*$  υπάλγεβρα με  $I \in \mathcal{A}$  και  $\xi \in H$  μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση  $\omega(A) := \langle A\xi, \xi \rangle$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Τότε η αναπαράσταση GNS  $(\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$  είναι unitarily ισοδύναμη με την  $A \rightarrow A|_K$ ,  $A \in \mathcal{A}$  όπου  $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$ .

(... και μπορώ να επιλέξω τον τελεστή  $U$  που υλοποιεί την ισοδυναμία ώστε  $U\xi_\omega = \xi$ .)

Απόδειξη. Άσκηση.

<sup>2</sup>Τα  $\xi_\omega$  και  $\xi'$  είναι κυκλικά για τις  $\pi_\omega$  και  $\pi'$  αντίστοιχα.