Ο Συναρτησιακός Λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα, όχι κατ' αναγκη μεταθετική (πχ. $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$).
Σταθεροποιούμε ένα $a \in \mathcal{A}$.

Αν p είναι ένα πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ ($c_k \in \mathbb{C}$), θέτουμε $p(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$ (όπου $a^0 = \mathbf{1}$).

Στόχος: να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \mapsto p(a)$ σε ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων.

Παρατήρηση. Η απεικόνιση $\omega_\pi : p \mapsto p(a)$ διατηρεί το άθροισμα $+$ και το γινόμενο $\cdot$.

Η C^* άλγεβρα που παραγεται απο ενα στοιχειο Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$. Συμβολιζουμε $C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι η C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$. Προκειται για την μικροτερη C*-υπαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιεχει το a και την $\mathbf{1}$, δηλαδη ειναι η τομη ολων των C*-υπαλγεβρων της $\mathcal{A}$ που περιεχουν το a και την $\mathbf{1}$.

Παρατήρηση. Η $C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι μεταθετικη αν και μονο αν το a ειναι φυσιολογικο, δηλ. $a^*a = aa^*$. Τοτε

$$C^*(\mathbf{1}, a) = \overline{\text{span}}\{a^n a^{*m} : n, m \in \mathbb{Z}_+\} = \overline{\{p(a, a^*) : p \text{ πολυωνυμο δυο μεταβλητων}\}}$$

(δηλ. $p(s,t) = \sum_{n,m=0}^{N} \lambda_{n,m} s^n t^m$).

Η *αποδειξη* ειναι απλη εφαρμογη των ορισμων:
Αν η $C^*(\mathbf{1}, a)$ ειναι μεταθετικη, τοτε βεβαιως τα a και a^* θα μετατιθενται, δηλαδη το a θα ειναι φυσιολογικο.

Αν αντιστροφα τα a και a^* μετατιθενται, τοτε μετατιθενται και οι δυναμεις τους, a^n και a^{*m} για $n, m \in \mathbb{Z}_+$, οποτε η γραμμικη θηκη των γινομενων $\{a^n a^{*m} : n, m \in \mathbb{Z}_+\}$, που δεν ειναι αλλη απο το συνολο των πολυωνυμων ως προς a και a^*, ειναι αλγεβρα, μαλιστα μεταθετικη, αυτοσυζυγης, και βεβαιως περιεχει τα a και a^*. Επομενως η κλειστη της θηκη ειναι μεταθετικη C^* άλγεβρα, περιεχει τα a και a^*, και προφανως περιεχεται σε καθε C*-υπαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιεχει το a και την $\mathbf{1}$. Ειναι δηλαδη η $C^*(\mathbf{1}, a)$. □

Παράδειγμα 1. *Εστω $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγες και $\mathcal{A} = C(K)$. Τοτε η μοναδιαια C*-υπαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παραγεται απ το στοιχειο $f_0(z) = z$ ($z \in K$) είναι η ιδια η $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Η $C^*(\mathbf{1}, f_0) \subseteq C(K)$ ειναι αλγεβρα, περιεχει το συζυγες καθε στοιχειου της (ειναι *-αλγεβρα), περιεχει τις σταθερες συναρτησεις (αφου περιεχει την $\mathbf{1}$) και χωριζει τα σημεια του K, μαλιστα η συναρτηση f_0 απο μονη της τα χωριζει: αν $z \neq w$, τοτε $f_0(z) \neq f_0(w)$.

Δηλαδη η $C^*(\mathbf{1}, f_0)$ ικανοποιει τις υποθεσεις του Θεωρηματος Stone - Weierstrass (!). Συνεπως ειναι πυκνη στην $C(K)$. Αφου ομως ειναι κλειστη εξ υποθεσεως, ισουται με την $C(K)$. □

Λήμμα 2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$ με $a^*a = aa^*$. Αν $\mathcal{C} = C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι η C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$, τότε ο χώρος $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ των χαρακτήρων της $\mathcal{C}$ είναι ομοιομορφικός με το φάσμα $\sigma(a)$ του a μέσω της απεικόνισης*

$$\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(a)\,.$$

Απόδειξη. Η $\mathcal{C}$ είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα, C^* υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$. Όπως εχουμε δείξει, για κάθε $y \in \mathcal{C}$ έχουμε $\sigma_{\mathcal{C}}(y) = \sigma_{\mathcal{A}}(y)$ οπότε γράφουμε απλώς $\sigma(y)$. Η απεικόνιση

$$\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(a)$$

είναι συνεχής (από τον ορισμό της τοπολογίας του χώρου $\mathcal{M}(\mathcal{C})$). Επειδή

$$\sigma(a) = \sigma_{\mathcal{C}}(a) = \{\phi(a) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\},$$

η $\hat{a}$ απεικονίζει τον (συμπαγή Hausdorff) χώρο $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ επί του $\sigma(a)$.

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι η $\hat{a}$ είναι ενα-προς-ενα [1]. Έστω $\phi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ με $\hat{a}(\phi) = \hat{a}(\psi)$, δηλαδή $\phi(a) = \psi(a)$. Τότε $\phi(a^n) = \psi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά, όπως έχουμε δείξει, έχουμε $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$ και $\psi(a^*) = \overline{\psi(a)}$, άρα $\phi(a^*) = \psi(a^*)$. Επομένως $\phi(a^{*m}) = \psi(a^{*m})$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και άρα $\phi(a^n a^{*m}) = \psi(a^n a^{*m})$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η $\mathcal{C}$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{a^n a^{*m} : n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$ και οι ϕ και ψ είναι γραμμικές και συνεχείς. Έπεται λοιπόν ότι $\phi = \psi$. $\square$

Θεώρημα 3 (Συναρτησιακός λογισμός)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$. Υπάρχει *-μορφισμός*

$$\omega_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$$

με $\omega_c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\omega_c(\mathrm{id}) = a$ αν και μόνον αν $a^*a = aa^*$. *Η απεικόνιση ω_c (αν υπάρχει) είναι μοναδική και ισομετρική, και το πεδίο τιμών της είναι ακριβώς η C^*-υπάλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$.*

Συμβολισμός: Αν $f \in C(\sigma(a))$, γράφουμε συνήθως $f(a)$ αντί για $\omega_c(f)$.

Ορισμός 1. *Έστω $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Η απεικόνιση*

$$\omega_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A} : f \mapsto f(a)$$

ονομάζεται συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus).

Αποδειξη του Θεωρηματος (α) Η συνθήκη $a^*a = aa^*$ είναι αναγκαία για την ύπαρξη του ω_c. Πράγματι, αν $f_o : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση $f_o(z) = \mathrm{id}(z) = z$, τότε $\omega_c(f_o) = a$ από την υπόθεση. Επομένως $a^* = (\omega_c(f_o))^* = \omega_c(f_o^*)$ αφού η ω_c είναι *-μορφισμός. Αλλά οι συναρτήσεις f_o και f_o^* μετατίθενται, συνεπώς και οι εικόνες τους a και a^* πρέπει να μετατίθενται.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι η συνθήκη $a^*a = aa^*$ ικανοποιείται. Από το Λήμμα, η απεικόνιση $\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \sigma(a)$ είναι ομοιομορφισμός. Είναι εύκολο να ελέγξεις [2] ότι η απεικόνιση

$$\Psi : C(\sigma(a)) \to C(\mathcal{M}(\mathcal{C})) : f \to f \circ \hat{a}$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Αλλά από το Θεώρημα Gelfand - Naimark η απεικόνιση

$$\mathcal{G}^{-1} : C(\mathcal{M}(\mathcal{C})) \to \mathcal{C} : \hat{y} \to y$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Αν ονομάσω ω_c την σύνθεση

$$\omega_c = \mathcal{G}^{-1} \circ \Psi : C(\sigma(a)) \xrightarrow{\Psi} C(\mathfrak{M}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$$

τότε η ω_c είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $C(\sigma(a))$ επί της $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$.

Μένει να ελέγξουμε ότι $\omega_c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και ότι $\omega_c(f_o) = a$. Η πρώτη σχέση αληθεύει γιατί $\Psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Η δεύτερη επίσης αληθεύει γιατί $\Psi(f_o) = \hat{a}$ και $\mathcal{G}^{-1}(\hat{a}) = a$.

[1] γιατι τοτε η αντίστροφή της θα ειναι συνεχης, αφου ο $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ ειναι συμπαγης

[2] Άσκηση!

(γ) *(Μοναδικότητα)* Έστω $\Phi : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ *-μορφισμός με $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\Phi(f_o) = a$. Επειδή οι $C(\sigma(a))$ και $\mathcal{A}$ είναι C^* άλγεβρες με μονάδα, και ο Φ είναι *-μορφισμός, έπεται (όπως έχουμε δείξει) ότι ο Φ είναι συνεχής. Έχουμε όμως, για κάθε $n, m = 0, 1, \ldots$,

$$\Phi(f_o^n f_o^{*m}) = \Phi(f_o)^n \Phi(f_o)^{*m} = a^n a^{*m} = \omega_c(f_o)^n \omega_c(f_o)^{*m} = \omega_c(f_o^n f_o^{*m})\,.$$

Επομένως οι Φ και ω_c ταυτίζονται στην γραμμική θήκη του συνόλου $\{f_o^n f_o^{*m} : n, m = 0, 1, \ldots\}$. Αλλά η γραμμική αυτή θήκη είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $C(\sigma(a))$ που περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και χωρίζει τα σημεία του $\sigma(a)$. Επομένως, από το Θεώρημα Stone - Weierstrass, είναι πυκνή στην $C(\sigma(a))$. Αφού οι Φ και ω_c είναι συνεχείς, έπεται ότι θα ταυτίζονται και στην $C(\sigma(a))$. □

Πόρισμα 4. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Το σύνολο*

$$\{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει την μονάδα και το a και συμβολίζεται $C^*(\mathbf{1}, a)$. Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολυωνύμων των a και a^*.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$ είναι ακριβως η εικονα, μεσω του συναρτησιακου λογισμου ω_c, της μεταθετικής C* άλγεβρας $C(\sigma(a))$. Άρα είναι μεταθετική C* άλγεβρα με μονάδα. Καθε συνεχής συναρτηση f στο συμπαγες $\sigma(a)$ ανηκει στην κλειστη γραμμική θήκη του συνόλου $\{f_o^n f_o^{*m} : n, m \in \mathbb{Z}_+\}$ (Stone - Weierstrass), αρα το $f(a)$ ανηκει στην κλειστη γραμμική θήκη του συνόλου $\{a^n a^{*m} : n, m \in \mathbb{Z}_+\}$, δηλαδη είναι όριο πολυωνύμων των a και a^*. □

Θεώρημα 5 (φασματικής απεικόνισης)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό και $f \in C(\sigma(a))$ τότε*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$
$$\textit{δηλαδή}\ \ \sigma(f(a)) = \{f(z) : z \in \sigma(a)\}.$$

Απόδειξη. Αν $\mathcal{C} = C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι η μικρότερη C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει το a και την $\mathbf{1}$, η απεικόνιση

$$\omega_c : C(\sigma(a)) \longrightarrow \mathcal{C} : f \longrightarrow f(a)$$

είναι ισομορφισμός αλγεβρών. Επομένως, $\lambda\mathbf{1} - f(a) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ αν και μόνον αν $\lambda\mathbf{1} - f \in \mathrm{Inv}(C(\sigma(a))$. Το τελευταίο όμως συμβαίνει αν και μόνον αν η συναρτηση $z \mapsto \lambda - f(z)$ δεν μηδενιζεται σε κανενα σημειο $z \in \sigma(a)$, δηλαδη αν και μόνον αν $\lambda \notin f(\sigma(a))$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{C}}(f(a)) = f(\sigma(a)))$. Ξέρουμε όμως τώρα ότι $\sigma_{\mathcal{C}}(f(a)) = \sigma_{\mathcal{A}}(f(a))$. □

Παρατήρηση 6. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα χωρίς μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$, από τον συναρτησιακό λογισμό ορίζεται το $f(a) \in \mathcal{A}^\sim$ (όπου $\mathcal{A}^\sim = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ η μοναδοποίηση της $\mathcal{A}$). Το $f(a)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (ακριβέστερα, στην εικόνα της $\mathcal{A}$ μέσα στην $\mathcal{A}^\sim$) αν-ν η συνάρτηση f μηδενίζεται στο $0 \in \sigma(a)$.*

Η απόδειξη αφήνεται ως Άσκηση.