ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13-Ε.20)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ III

Για τους αναγκαιους ορισμους και συμβολισμους, δειτε τις διαφανειες.

Άσκηση 1. Η C*-αλγεβρα Αν $C(X)$ «θυμαται» τον X: Αν X και Y ειναι συμπαγείς χώροι Hausdorff, δείξτε ότι οι X και Y είναι ομοιομορφικοί αν και μονον αν οι άλγεβρες $C(X)$ και $C(Y)$ είναι ισομορφικές ως άλγεβρες αν και μονον είναι ισομορφικές ως C*-άλγεβρες.
Πιο συγκεκριμενα: αν μια απεικονιση $h : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμος τοτε η $C(Y) \to C(X) : f \mapsto f \circ h$ (οριζεται και) ειναι ισομορφισμος αλγεβρων, ή ισοδυναμα (οριζεται και) ειναι ισομετρικος *-ισομορφισμος.
Αντιστροφα, ενας ισομορφισμος αλγεβρων $\Phi : C(Y) \to C(X)$ επαγει ομοιομορφισμο $h : X \to Y$ ωστε $\Phi(f) = f \circ h$ για καθε $f \in C(Y)$.

Άσκηση 2. Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα χωρίς μονάδα, $\mathcal{A}^{\sim} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ η μοναδοποίηση της $\mathcal{A}$ και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$, από τον συναρτησιακό λογισμό ορίζεται το $f(a) \in \mathcal{A}^{\sim}$. Δειξτε οτι το $f(a)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (ακριβέστερα, στην εικόνα της $\mathcal{A}$ μέσα στην $\mathcal{A}^{\sim}$) αν-ν η συνάρτηση f μηδενίζεται στο $0 \in \sigma(a)$.

Άσκηση 3. (α) Δείξτε ότι ένας μιγαδικός $n \times n$ πίνακας T είναι θετικό στοιχείο στην C* άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$ αν- ν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi \rangle \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.

(β) (Προαιρετικα) Στην C* άλγεβρα $\mathcal{B}(H)$, δείξτε ότι ένα στοιχειο T είναι θετικό αν-ν $\langle T\xi, \xi \rangle \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Άσκηση 4. Αν K ειναι συμπαγής χώρος Hausdorff, δείξτε ότι στην C^* -αλγεβρα $A = C(K)$ ένα στοιχειο f είναι θετικό αν-ν $f(t) \geqslant 0$ για κάθε $t \in K$.

Άσκηση 5 (Για την Τεταρτη 5 Απριλιου). Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* αλγεβρα με μοναδα, $a \in \mathcal{A}$ *φυσιολογικο* και $f \in C(\sigma(a))$. Δειξτε οτι αν το $f(a)$ ειναι θετικο στοιχειο της $\mathcal{A}$, τότε $f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Εξεταστε αν ισχυει το αντιστροφο, ή αν χρειαζεται η επιπλεον υποθεση $a = a^*$.

Άσκηση 6. Εστω $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ δυο C^* αλγεβρες και $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας *-μορφισμος. Δειξτε οτι αν $a \in \mathcal{A}_+$ τότε $\Phi(a) \in \mathcal{B}_+$.
Δείξτε επισης ότι, αν $v \in \mathcal{B}$, την ιδια ιδιοτητα (διατηρηση της θετικοτητας) εχει η απεικονιση
$\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} : a \mapsto v^*\Phi(a)v$.
Δείξτε επισης ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, την ιδια ιδιοτητα εχει η απεικονιση
$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}) : [a_{ij}] \mapsto [\Phi(a_{ij})]$.

Άσκηση 7. Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* αλγεβρα με μοναδα και $h, k \in \mathcal{A}$. Αν $\lambda \notin \sigma(hk) \cup \{0\}$ θελουμε να δειξουμε οτι $\lambda \notin \sigma(kh)$. Μπορούμε να υποθεσουμε ότι $\lambda = 1$ (εξηγειστε γιατι).
Υποθετουμε πρώτα οτι $\|h\| \|k\| < 1$ οποτε $(\mathbf{1} - hk)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (hk)^n$.
Υπολογειστε το $k(\mathbf{1} - hk)^{-1}h$ για να βρειτε τον $(\mathbf{1} - kh)^{-1}$.
Δειξτε οτι ο τυπος που βρηκατε ειναι ο αντιστροφος του $\mathbf{1} - kh$ και στη γενικη περιπτωση (χωρις περιορισμους στις νορμες). Χρειαζεται η υποθεση οτι η $\mathcal{A}$ ειναι C^* αλγεβρα;
Δειξτε οτι η υποθεση $\lambda \neq 0$ δεν μπορει να παραλειφθει.

Άσκηση 8. *(Προαιρετικα)* Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* αλγεβρα χωρις μοναδα και $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ κατασταση (state). Αποδειξτε οτι υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό για την $\mathcal{A}$ μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \text{για κάθε} \;\; a \in \mathcal{A}.$$

Υποδειξη: Μπορει να χρειασθει να περασετε στη μοναδοποιηση της $\mathcal{A}$ και να δειξετε οτι η ϕ δεχεται θετικη επεκταση. Ποιος ειναι τοτε ο χωρος H_ϕ;