Η μοναδοποιηση μιας C* αλγεβρας

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα, ορίζουμε $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Ο χώρος $\mathcal{A}_1$ γίνεται άλγεβρα αν ορίσουμε

$$(x,\lambda)(y,\mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu) \quad x, y \in \mathcal{A},\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Η $\mathcal{A}_1$ έχει μονάδα το στοιχείο $(0,1)$. Ελέγχεται άμεσα ότι το σύνολο $\{(x,0) : x \in \mathcal{A}\}$ είναι γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}_1$, και μάλιστα μεγιστικό (δηλ. δεν υπάρχει άλλο γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}_1$ που να το περιέχει), αφού έχει συνδιάσταση 1. Το ιδεώδες αυτό είναι ισόμορφο, ως άλγεβρα, με την $\mathcal{A}$. (Σημείωσε ότι, ακόμα και αν η $\mathcal{A}$ έχει ήδη μονάδα $\mathbf{1}$, η $\mathcal{A}$ είναι γνήσιο υποσύνολο της $\mathcal{A}_1$, και το στοιχείο $(\mathbf{1},0)$ *δεν είναι μονάδα της* $\mathcal{A}_1$).

Θα δείξουμε ότι κάθε C^* άλγεβρα χωρίς μονάδα εμφυτεύεται ισομετρικά ως μεγιστικό ιδεώδες σε μια C^* άλγεβρα με μονάδα.

Έστω $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ μια C^* -άλγεβρα *χωρίς μονάδα* (δεν υποθέτω ότι η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική). Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η μοναδοποιημένη άλγεβρα $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ εφοδιάζεται με την ενέλιξη

$$(x,\lambda)^* = x^* + \bar{\lambda} \quad ((x,\lambda) \in \mathcal{A}_1)\,.$$

Αποδεικνύεται εύκολα (αλλά δεν θα μας χρειασθεί) ότι η $\mathcal{A}_1$ γίνεται άλγεβρα Banach αν εφοδιασθεί με την νόρμα $\|\cdot\|_1$ όπου $\|(x,\lambda)\|_1 = \|x\| + |\lambda|$ $(x \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C})$. Η $\|\cdot\|_1$ δεν ικανοποιεί[1] την ιδιότητα C^*. Υπάρχει όμως μία νόρμα στην $\mathcal{A}_1$ ως προς την οποία γίνεται C^* άλγεβρα. Για να την ορίσουμε, θεωρούμε την κανονική αριστερή αναπαράσταση π της $\mathcal{A}$ στον χώρο Banach $\mathcal{A}$, δηλαδή

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{A}) : x \mapsto \pi(x)$$
$$\text{όπου } \pi(x) : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : y \mapsto xy\,.$$

Η απεικόνιση π είναι βεβαίως μορφισμός αλγεβρών, και είναι συστολή:

$$\|\pi(x)(y)\| = \|xy\| \leqslant \|x\|.\|y\|$$

για κάθε $y \in \mathcal{A}$, αρα $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$. Επειδή όμως η $\mathcal{A}$ είναι C^* άλγεβρα, η π είναι ισομετρική: πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$,

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| = \|\pi(x)(x^*)\| \leqslant \|\pi(x)\|.\|x^*\| = \|\pi(x)\|.\|x\| \leqslant \|x\|.\|x\|$$

άρα $\|\pi(x)\| = \|x\|$. Έτσι εμφυτεύουμε ισομετρικά την $\mathcal{A}$ στην άλγεβρα Banach $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ των τελεστών στον χώρο Banach $\mathcal{A}$. Η μοναδοποιημένη άλγεβρα $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ είναι ισόμορφη ως άλγεβρα με την εξής υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(\mathcal{A})$

$$\mathcal{A}_1 \simeq \{\pi(a) + \lambda\mathbf{1} : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{A})$$

(όπου $\mathbf{1}$ η μονάδα στην $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, δηλ. ο ταυτοτικός τελεστής).

Ισχυρισμός Ο χώρος $\mathcal{E} := \{\pi(a) + \lambda\mathbf{1} : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ είναι πλήρης ως προς τη νόρμα του χώρου Banach $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη Θα χρησιμοποιήσω ότι η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, οπότε $\mathbf{1} \notin \pi(\mathcal{A})$. Παρατηρώ ότι ο χώρος $\pi(\mathcal{A})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ (γιατι είναι πλήρης, αφού η π είναι ισομετρία και η $\mathcal{A}$ είναι πλήρης). Συνεπώς το $\mathbf{1}$ έχει θετική απόσταση, έστω $\delta > 0$ απ τον υπόχωρο $\pi(\mathcal{A})$, οπότε

$$\|\pi(a) + \lambda\mathbf{1}\| \geqslant \delta|\lambda| \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A} \text{ και } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{*}$$

[1] Αν παραδείγματος χάριν $x = x^* \in \mathcal{A}$ τότε $\|(x,i)^*(x,i)\|_1 = \|x\|^2 + 1$ ενώ $\|(x,i)\|_1^2 = (\|x\| + 1)^2$.

Έστω λοιπόν μια βασική ακολουθία τελεστών $(\pi_n(a) + \lambda_n \mathbf{1})$. Από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι

$$\|(\pi(a_n) + \lambda_n \mathbf{1}) - (\pi(a_m) + \lambda_m \mathbf{1})\| \geqslant \delta|\lambda_m - \lambda_m|\,,$$

άρα η (λ_n) είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{C}$, άρα συγκλίνει σε κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε όμως και η $(\pi(a_n))$ είναι βασική, αφού $\pi(a_n) = (\pi_n(a) + \lambda_n \mathbf{1}) - \lambda_n \mathbf{1}$. Άρα και η (a_n) είναι βασική (αφού η π είναι ισομετρία) συνεπώς κι αυτή συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathcal{A}$ αφού η $\mathcal{A}$ είναι πλήρης. Τελικώς η $(\pi_n(a) + \lambda_n \mathbf{1})$συγκλίνει στο $\pi(a) + \lambda \mathbf{1}$, όπως θέλαμε.

Επομένως, μεταφέροντας τη νόρμα απ τον χώρο τελεστών $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, ορίζουμε τη νόρμα[2]

$$\|(x,\lambda)\|_\pi := \|\pi(x) + \lambda \mathbf{1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{A})} = \sup\{\|xy + \lambda y\|_{\mathcal{A}} : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leqslant 1\}\,.$$

Επειδή η νόρμα στην $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ είναι υποπολλαπλασιαστική και η απεικόνιση $(x,\lambda) \mapsto \pi(x) + \lambda \mathbf{1}$ διατηρεί το γινόμενο, έπεται ότι η $\|\cdot\|_\pi$ είναι υποπολλαπλασιαστική. Έτσι η $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_\pi)$ γίνεται άλγεβρα Banach με μονάδα.

Ισχυρισμός Με τον ορισμό $(x,\lambda)^* = x^* + \bar{\lambda}$, η $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_\pi)$ είναι C^*-άλγεβρα.

Απόδειξη Το μόνο που μένει να ελεγχθεί είναι η ιδιότητα C^*:

Έστω $a = (x,\lambda) \in \mathcal{A}_1$. Για κάθε $y \in \mathcal{A}$ με $\|y\| \leqslant 1$ θεωρούμε το στοιχείο

$$\begin{aligned}&(y,0)^*(x,\lambda)^*(x,\lambda)(y,0) = ((x,\lambda)(y,0))^*((x,\lambda)(y,0))\\&= ((xy+\lambda y)^*(xy+\lambda y), 0) = (z^*z, 0) \in \mathcal{A}_1\end{aligned}$$

όπου το $z = xy + \lambda y$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (που ικανοποιεί την ιδιότητα C^*), άρα $\|z\|^2 = \|z^*z\|$. Αλλά $\|z^*z\| = \|\pi(z^*z)\| = \|(z^*z,0)\|_\pi$. Έχω λοιπόν

$$\begin{aligned}\|xy+\lambda y\|^2 &= \|z\|^2 = \|z^*z\| = \|(z^*z,0)\| = \|(y,0)^*(x,\lambda)^*(x,\lambda)(y,0)\|\\&\leqslant \|(y,0)\|_\pi \|a^*a\|_\pi \|(y,0)\|_\pi \leqslant \|a^*a\|_\pi\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\|a\|_\pi^2 = \sup\{\|xy+\lambda y\|^2 : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leqslant 1\} \leqslant \|a^*a\|_\pi\,.$$

Αυτή ήταν η κρίσιμη ανισότητα. Η αντίστροφη είναι τώρα εύκολη:

$$\|a\|_\pi^2 \leqslant \|a^*a\|_\pi \leqslant \|a^*\|_\pi \|a\|_\pi$$

άρα $\|a\|_\pi \leqslant \|a^*\|_\pi$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, οπότε $\|a^*\|_\pi \leqslant \|a^{**}\|_\pi = \|a\|_\pi$ και τώρα η προηγούμενη δίνει

$$\|a\|_\pi^2 \leqslant \|a^*a\|_\pi \leqslant \|a^*\|_\pi \|a\|_\pi = \|a\|_\pi^2\,,$$

επομένως ισχύει ισότητα. □

[2]ότι είναι πράγματι νόρμα φαίνεται από την ανισότητα (*) (εξηγείστε γιατί).