

Ο τύπος Gelfand-Beurling

Έστω \mathcal{A} άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Η φασματική ακτίνα (spectral radius) $\rho(a)$ είναι η ακτίνα του μικρότερου δίσκου στο \mathbb{C} που περιέχει το $\sigma(a)$. Δηλαδή

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Έχουμε δείξει ότι $\sigma(a) \subseteq B(0, \|a\|)$, άρα $\rho(a) \leq \|a\|$, αλλά η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα 1. Έστω \mathcal{A} άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Πόρισμα 2. Αν \mathcal{A} είναι C^* -άλγεβρα (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\|.$$

Ειδικότερα αυτό ισχύει όταν το a είναι αυτοσυζυγές (δηλ. $a^* = a$).

Απόδειξη του Θεωρήματος. Θα δείξουμε ότι

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leq \rho(a) \leq \liminf \|a^n\|^{1/n}$$

οπότε θα έχουμε δείξει ταυτοχρόνως την ύπαρξη του ορίου και τη ζητούμενη ισότητα.

(i) Αν $\lambda \in \sigma(a)$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε¹ $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ άρα $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$, όπως έχουμε δείξει. Επομένως $|\lambda| \leq \|a^n\|^{1/n}$. Παίρνοντας infimum ως προς $\lambda \in \sigma(a)$, έχουμε $\rho(a) \leq \|a^n\|^{1/n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\rho(a) \leq \inf \|a^n\|^{1/n}$ και συνεπώς $\rho(a) \leq \liminf \|a^n\|^{1/n}$.

(ii) Έστω $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ γραμμική και συνεχής. Όπως έχουμε δείξει, η συνάρτηση $h(\lambda) = \lambda\phi[(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}]$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, άρα και στο $\{\lambda : |\lambda| > \rho(a)\}$. Επομένως η συνάρτηση

$$g(z) = h\left(\frac{1}{z}\right) = \phi((\mathbf{1} - za)^{-1})$$

ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{\rho(a)}\}$.² Ορίζεται επίσης και στο 0, γιατί υπάρχει το όριο $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0) = \phi(\mathbf{1}) \in \mathbb{C}$, (αφού η $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής). Συνεπώς το 0 είναι επουσιώδης ανωμαλία για την g , άρα η g ορίζεται και είναι ολόμορφη στον δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho(a)}\}$. Επομένως αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < \frac{1}{\rho(a)}.$$

Ισχυρίζομαι ότι $c_n = \phi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

¹Επειδή $x^n - \lambda^n \mathbf{1} = (x - \lambda \mathbf{1})(x^{n-1} + x^{n-2}\lambda + \dots + \lambda^{n-1}\mathbf{1}) = (x^{n-1} + x^{n-2}\lambda + \dots + \lambda^{n-1}\mathbf{1})(x - \lambda \mathbf{1})$, αν το $x^n - \lambda^n \mathbf{1}$ αντιστρέφεται τότε και το $x - \lambda \mathbf{1}$ αντιστρέφεται.

²Εδώ θέτουμε $\frac{1}{\rho(a)} = +\infty$ όταν $\rho(a) = 0$.

Πράγματι, για $|z| < \frac{1}{\|a\|}$ ($\leq \frac{1}{\rho(a)}$) ξέρουμε (εφόσον $\|za\| < 1$) ότι

$$(\mathbf{1} - za)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n.$$

άρα, αφού η ϕ είναι γραμμική και συνεχής,

$$g(z) = \phi((\mathbf{1} - za)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \phi(a^n), \quad |z| < \frac{1}{\|a\|}.$$

Από την μοναδικότητα της δυναμοσειράς για την g έπεται τώρα ότι $c_n = \phi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \phi(a^n)$ συγκλίνει (όχι μόνον όταν $|z| < \frac{1}{\|a\|}$ αλλά και) όταν $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$. Κατά συνέπεια, για $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n \phi(a^n) = 0$. Επομένως η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη, δηλαδή για κάθε $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ γραμμική και συνεχή υπάρχει $K_\phi(z) < +\infty$ ώστε

$$|\phi(z^n a^n)| \leq K_\phi(z) \quad \text{για κάθε } n, \text{ όταν } |z| < \frac{1}{\rho(a)}.$$

Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος³ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $K(z)$ (ανεξάρτητη της ϕ) τέτοια ώστε για κάθε n να ισχύει $\|z^n a^n\| \leq K(z)$, οπότε

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(K(z))^{\frac{1}{n}}}{|z|} \quad \text{για κάθε } n, \text{ όταν } |z| < \frac{1}{\rho(a)}.$$

Αφού $K(z)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ όταν $n \rightarrow \infty$, έπεται ότι $\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|z|}$ για κάθε $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$, οπότε

$$\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(a)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. \square

Παρατήρηση Στο πρώτο βήμα της απόδειξης δείξαμε ότι $\rho(a) \leq \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Επομένως στην πραγματικότητα έχουμε ότι

$$\rho(a) = \lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Απόδειξη του Πορίσματος. Υποθέτουμε τώρα ότι η \mathcal{A} είναι C^* άλγεβρα και ότι το $a \in \mathcal{A}$ είναι φυσιολογικό. Έχουμε τότε

$$\|a\|^4 \stackrel{(C^*)}{=} \|a^* a\|^2 \stackrel{(C^*)}{=} \|(a^* a)^*(a^* a)\| \stackrel{(N)}{=} \|(a^*)^2 a^2\| = \|(a^2)^*(a^2)\| \stackrel{(C^*)}{=} \|a^2\|^2$$

(η υπόθεση $a^* a = a a^*$ χρησιμοποιήθηκε στη σχέση (N)), συνεπώς $\|a\|^2 = \|a^2\|$. Με επαγωγή βρίσκουμε ότι $\|a\|^{2^m} = \|a^{2^m}\|$, άρα $\|a\| = \|a^{2^m}\|^{1/2^m}$ για κάθε m , και συνεπώς

$$\rho(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_m \|a^{2^m}\|^{1/2^m} = \|a\|.$$

³ Αν \mathcal{A}^* είναι ο χώρος Banach των συνεχών γραμμικών μορφών $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, για κάθε n θεωρούμε την γραμμική και συνεχή απεικόνιση $\omega_n : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{C} : \phi \rightarrow \phi(z^n a^n)$. Η οικογένεια $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κατά σημείο φραγμένη: για κάθε $\phi \in \mathcal{A}^*$, $|\omega_n(\phi)| = |\phi(z^n a^n)| < K_\phi(z)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια είναι ομοιόμορφα φραγμένη: υπάρχει σταθερά $K(z)$ ώστε $\|\omega_n\| \leq K(z)$, δηλαδή $|\omega_n(\phi)| \leq K(z) \|\phi\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς για κάθε n έχουμε $|\phi(z^n a^n)| < K(z)$ για κάθε $\phi \in \mathcal{A}^*$ με $\|\phi\| \leq 1$, άρα (Hahn-Banach) $\|z^n a^n\| < K(z)$ για κάθε n .