ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13-Ε.20)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

Για τους αναγκαιους ορισμους και συμβολισμους, δειτε τις διαφανειες.

Άσκηση 1. Για τον $E = \ell^1_n(\mathbb{R})$ βρειτε καταλληλο συνολο Γ και γραμμικη *ισομετρια* $\phi : E \to \ell^\infty_\Gamma$. Επιλεξτε οσο πιο «μικρο» Γ μπορειτε.
Ιδια ερωτηση για τον $E = \ell^1_n(\mathbb{C})$. Συγκρινετε τα συνολα Γ στις δυο περιπτωσεις.

Άσκηση 2. Εστω E χωρος τελεστων. Δειξτε οτι
(R1) Αν $\alpha, \beta \in M_n$ και $x \in M_n(E)$ τοτε

$$\|\alpha \cdot x \cdot \beta\|_n \leqslant \|\alpha\| \, \|x\|_n \, \|\beta\|$$

(οπου $\|\cdot\|$ η νορμα του M_n και $\|\cdot\|_n$ η νορμα του $M_n(E)$).
(R2) Αν $x \in M_n(E)$ και $y \in M_m(E)$ τοτε ο $x \oplus y = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in M_{n+m}(E)$ ικανοποιει

$$\|x \oplus y\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n , \|y\|_m\} .$$

Άσκηση 3. Δειξτε οτι καθε $n \times n$ πινακας $A = [a_{ij}]$ τελεστων $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ οριζει *φραγμενο* τελεστη στον H^n (οπου $H^n = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$) μεσω πολλ/σμου πινακων και οτι αντιστροφα καθε $A \in \mathcal{B}(H^n)$ επαγει εναν $n \times n$ πινακα $[a_{ij}]$ τελεστων $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$.

Άσκηση 4. Δειξτε οτι η απεικονιση $\Phi : M_2 \to M_2 : a = a^\dagger$ (ανάστροφος) ειναι ισομετρια στον $E = M_2$, αλλα δεν ειναι πληρης ισομετρια.

Άσκηση 5. Δειξτε οτι ο $(\ell^1_2, \|\cdot\|_1)$ με πραξεις και ενελιξη κατα συντεταγμενη ειναι αλγεβρα Banach, αλλα δεν ειναι C* αλγεβρα.