# Δυο κουβέντες για Άλγεβρες von Neumann

**Ορισμός 1.** *Έστω $H$ χώρος Hilbert. Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology,* sot*) στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στον $H$. Δηλαδή ένα δίκτυο $(T_i)$ από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή $T$ ως προς την* sot *αν και μόνον αν, για κάθε $x \in H$, $\|T_i x - Tx\|_H \to 0$.*

Παρατήρηση

$$T_i \overset{\text{sot}}{\to} T \iff \forall n, \forall \vec{x} \in H^{(n)} : \|T_i^{(n)}\vec{x} - T^{(n)}\vec{x}\|_{H^{(n)}} \to 0 \,.$$

Η sot είναι η ασθένεστερη τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ για την οποία όλες οι ημινόρμες $\{p_x, x \in H\}$ (όπου $p_x(T) = \|Tx\|$) είναι συνεχείς.

Είναι η τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ που παράγεται από (έχει υποβάση) τα σύνολα $\{V(A,x) : A \in \mathcal{B}(H), x \in H\}$, όπου $V(A,x) := \{T \in \mathcal{B}(H) : \|Tx - Ax\| < 1\}$.

Μιά βάση περιοχών του $A \in \mathcal{B}(H)$ για την sot είναι η οικογένεια

$$\{\mathcal{W}(A, \vec{x}, \epsilon) : \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}, \vec{x} \in H^{(n)}\}$$

όπου

$$\mathcal{W}(A, \vec{x}, \epsilon) := \{T \in \mathcal{B}(H) : \left\|T^{(n)}\vec{x} - A^{(n)}\vec{x}\right\|_{H^{(n)}} < \epsilon\} \,.$$

Πράγματι, $\|(T-A)\frac{\sqrt{n}x_k}{\epsilon}\| < 1 \ \forall k \in [n] \Rightarrow \sum_{k=1}^n \|(T-A)x_k\|^2 < \epsilon^2 \Rightarrow \|(T-A)\frac{x_k}{\epsilon}\| \ \forall k \in [n]$.

Παρατήρηση Η sot δεν είναι μετρικοποιήσιμη, όταν $\dim H = \infty$. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{E} = \{\sqrt{n}P_n :\in \mathbb{N}\}$ όπου οι $P_n$ είναι κάθετες ανά δύο μονοδιάστατες προβολές, ο $0 \in \mathcal{B}(H)$ ανήκει στην sot-κλειστή θήκη του $\mathcal{E}$, αλλά δεν είναι sot-όριο ακολουθίας από το $\mathcal{E}$.

**Ορισμός 2.** *Αν $H$ είναι χώρος Hilbert και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, ορίζω τον μεταθέτη (commutant) $\mathcal{S}'$ του $\mathcal{S}$ ως εξής*

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST \ \text{ για κάθε } S \in \mathcal{S}\}.$$

Το $\mathcal{S}'$ είναι πάντα άλγεβρα και περιέχει τον $I_H$. Επίσης, είναι sot-κλειστή. Η $\mathcal{S}'$ είναι *-άλγεβρα αν-ν το είναι αυτοσυζυγές σύνολο, οπότε είναι C* άλγεβρα, αφού είναι norm-κλειστή.

**Ορισμός 3.** *Έστω $(X,\mu)$ χώρος μέτρου. Η πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$ του $(X,\mu)$ είναι η*

$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty(X,\mu)\}.$$

*Η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή $C^*$-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(L^2(X,\mu))$.*

**Πρόταση 1.** *Αν ο $(X,\mu)$ είναι σ-πεπερασμένος, τότε $(\mathcal{M}_\mu)' = \mathcal{M}_\mu$. Ισοδύναμα, η $\mathcal{M}_\mu$ είναι μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra - masa) του $\mathcal{B}(L^2(X,\mu))$.*

*Απόδειξη.* Η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή, άρα $\mathcal{M}_\mu \subseteq (\mathcal{M}_\mu)'$. Έστω λοιπόν $T \in (\mathcal{M}_\mu)'$. Πρέπει να βρούμε $g \in L^\infty(X,\mu)$ ώστε $T = M_g$.

**(i)** Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mu(X) < \infty$. Τότε η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ ανήκει στον $L^2(X,\mu)$. Έστω $g = T\mathbf{1} \in L^2(X,\mu)$. Τότε για κάθε $f \in L^\infty(X,\mu)$ έχουμε $gf \in L^2(X,\mu)$ και

$$T(f) = T(f\mathbf{1}) = T(M_f(\mathbf{1})) = M_f(T(\mathbf{1})) = M_f(g) = fg = gf. \qquad \text{(*)}$$

*Αν δείξουμε* ότι $g \in L^\infty(X,\mu)$, τότε η $g$ ορίζει φραγμένο τελεστή $M_g \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$, οπότε η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$T(f) = M_g(f) \quad \text{για κάθε } f \in L^\infty(X,\mu)\,,$$

δηλαδή οι φραγμένοι τελεστές $T$ και $M_g$ θα ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $L^\infty(X,\mu)$ του $L^2(X,\mu)$,[1] άρα θα είναι ίσοι. Μένει λοιπόν να δειχθεί ότι $g \in L^\infty(X,\mu)$.

[1] *Ο $L^\infty(X,\mu)$ είναι πυκνός στον $L^2(X,\mu)$*: Αν $f \in L^2(X,\mu)$ είναι κάθετη σε κάθε $g \in L^\infty(X,\mu)$, θα δείξω ότι $f = 0$. Από την υπόθεση, η $f$ θα είναι κάθετη στην $\chi_E$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq X$. Δηλαδή $\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq X$. Αυτό σημαίνει ότι $f = 0$ $\mu$-σχεδόν παντού, δηλ. η $f$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $L^2(X,\mu)$.

Πράγματι, έστω $a > 0$ ώστε το μέτρο του $Y_a = \{t \in X : |g(t)| > a\}$ να είναι μη μηδενικό. Αν $f_a$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $Y_a$ τότε $\|f_a\|_2^2 = \mu(Y_a) \neq 0$. Αλλά επίσης $f_a \in L^\infty(X,\mu)$ οπότε η (*) εφαρμόζεται και δείχνει ότι $T(f_a) = f_a g$, άρα

$$\|T\|^2\|f_a\|_2^2 \geqslant \|T(f_a)\|_2^2 = \int |f_a g|^2 d\mu = \int_{Y_a} |g|^2 d\mu \geqslant a^2\mu(Y_a) = a^2\|f_a\|_2^2$$

επομένως $a \leqslant \|T\|$. Άρα, αν $b > \|T\|$ τότε το σύνολο $Y_b$ έχει μέτρο μηδέν, δηλαδή $|g(t)| \leqslant b$ μ-σχεδόν παντού. Έπεται ότι $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$ και τώρα η (*) δείχνει ότι $T = M_g$.

(ii) Για την γενική ($\sigma$-πεπερασμένη) περίπτωση, γράφουμε τον $X$ ως ένωση αριθμήσιμης οικογένειας ξένων ανά δύο υποσυνόλων $X_n$ πεπερασμένου μέτρου. Έστω $e_n \in L^2(X,\mu)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $X_n$ και $g_n = T(e_n)$. Όπως προηγουμένως, για κάθε $f \in L^\infty(X,\mu) \cap L^2(X,\mu)$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$TM_{e_n}(f) = T(fe_n) = T(M_f(e_n)) = M_f(T(e_n)) = M_f(g_n) = fg_n.$$

Συμπεραίνουμε όπως πριν ότι η $g_n$ είναι ουσιωδώς φραγμένη, οπότε ο $M_{g_n}$ είναι φραγμένος τελεστής και ότι $M_{g_n} = TM_{e_n}$, άρα $\|g_n\|_\infty = \|M_{g_n}\| \leqslant \|T\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι αν ορίσουμε την $g$ στο $X$ από την σχέση $g|X_n = g_n|X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $g$ είναι $\mu$-μετρήσιμη και $\|g\|_\infty \leqslant \sup_n \|g_n\|_\infty \leqslant \|T\|$, άρα $g \in L^\infty(X,\mu)$ και

$$M_g M_{e_n} = M_{ge_n} = M_{g_n} = TM_{e_n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο τελεστής $M_{e_n}$ είναι η προβολή στον υπόχωρο $H_n := \{f \in L^2(X,\mu) : e_n f = f\}$ του $L^2(X,\mu)$, οι φραγμένοι τελεστές $M_g$ και $T$ συμπίπτουν σε καθένα από τους υποχώρους αυτούς, άρα (αφού είναι γραμμικοί και συνεχείς) συμπίπτουν και στην κλειστή γραμμική θήκη της ένωσής τους, που είναι[2] όλος ο $L^2(X,\mu)$. □

**Παράδειγμα 1.** *Παράδειγμα Αν $H = L^2([0,1],m)$ (m: μέτρο Lebesgue) και $\mathcal{M}_0 = \{M_f : f \in C([0,1])\} \subseteq \mathcal{B}(L^2([0,1],m))$, τότε $\mathcal{M}_0' = \mathcal{M}_m$.*

Απόδειξη υπάρχει στο `masa.pdf` στην η-τάξη: (0.2) Σημειώσεις 2019-20.

**Ορισμός 4.** *Έστω $H$ χώρος Hilbert. Μία άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον $H$ είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο του $\mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}''.$$

Παρατηρήσεις
(i) Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι $C^*$-άλγεβρα με μονάδα. Επιπλέον όμως είναι sot-κλειστή.

(ii) Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, τότε το σύνολο $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)''$ είναι η μικρότερη άλγεβρα von Neumann που περιέχει το $\mathcal{S}$, και ονομάζεται η άλγεβρα von Neumann που παράγεται από το $\mathcal{S}$.

(iii) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον $H$ είναι της μορφής $\mathcal{S}'$ για κάποιο αυτοσυζυγές σύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (π.χ. $\mathcal{S} = \mathcal{M}'$).

(iv) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον $H$ είναι της μορφής $\mathcal{U}'$ για κάποια ομάδα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(H)$ που αποτελείται από unitary τελεστές.

Απόδειξη Ονομάζουμε $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{M}' : U \text{ unitary}\}$. Είναι φανερό ότι πρόκειται για ομάδα: το γινόμενο (η σύνθεση) δυο unitary τελεστών είναι unitary, και ο αντίστροφος ενός unitary είναι ο συζυγής του, που είναι unitary. (Παρεμπιπτόντως, από την τελευταία παρατήρηση το $\mathcal{U}$ είναι αυτοσυζυγές σύνολο, οπότε πράγματι η $\mathcal{U}'$ είναι άλγεβρα von Neumann.)

Έστω $T \in \mathcal{U}'$: ο $T$ μετατίθεται με κάθε $U \in \mathcal{M}'$ που είναι unitary. Όμως η $\mathcal{M}'$ είναι άλγεβρα von Neumann, άρα είναι C*-άλγεβρα με μονάδα οπότε, όπως έχουμε δείξει, κάθε στοιχείο της $A \in \mathcal{M}'$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων unitary στοιχείων της $\mathcal{M}'$. Άρα ο $T$ μετατίθεται με κάθε $A \in \mathcal{M}'$, δηλαδή ανήκει στον $(\mathcal{M}')' = \mathcal{M}''$. Δείξαμε ότι $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{M}''$. Από την άλλη όμως, έχουμε $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}'$, άρα $\mathcal{M}'' \subseteq \mathcal{U}'$. Συμπέρασμα: $\mathcal{U}' = \mathcal{M}''$ που ισούται με $\mathcal{M}$, αφού η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα von Neumann. □

Θεώρημα δεύτερου μεταθέτη (Bicommutant Theorem)

**Θεώρημα 1** (von Neumann ). *Έστω $\mathcal{A}$ μία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε*

$$\mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^{\text{sot}}$$

*Ειδικότερα, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν είναι SOT-κλειστή.*

[2] Αν η $h \in L^2(X,\mu)$ είναι κάθετη σε κάθε $H_n$, τότε για κάθε $n$ και $f \in H_n$ έχουμε $\int_{X_n} h\bar{f}d\mu = 0$, άρα (θέτοντας $f = he_n$) $\int_{X_n} |h|^2 d\mu = 0$, άρα $\|h\|_2^2 = \int_X |h|^2 d\mu = \sum_n \int_{X_n} |h|^2 d\mu = 0$, δηλαδή $h = 0$.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα.

**Λήμμα 1.** *Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $H_0$ κλειστός υπόχωρος του $H$, και $P$ η ορθή προβολή στον $H_0$. Ο $H_0$ είναι $\mathcal{S}$-αναλλοίωτος (δηλ. $S(H_0) \subseteq H_0$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$) αν και μόνον αν $SP = PSP$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$.*

*Αν επί πλέον το $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές σύνολο, τότε ο $H_0$ είναι $\mathcal{S}$-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $SP = PS$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$, δηλ. αν και μόνον αν $P \in \mathcal{S}'$.*

*Απόδειξη.* Αν ο $H_0$ είναι $\mathcal{S}$-αναλλοίωτος, τότε για κάθε $x \in H$, επειδή $Px \in H_0$, για κάθε $S \in \mathcal{S}$ έχουμε $S(Px) \in H_0$, άρα $SPx = P(SPx)$, δηλαδή $SP = PSP$.

Αν αντίστροφα ισχύει η σχέση $SP = PSP$, τότε για κάθε $y \in H_0$ και κάθε $S \in \mathcal{S}$ έχουμε $Sy = SPy = PSPy$, άρα $Sy \in H_0$, δηλαδή ο $H_0$ είναι $\mathcal{S}$-αναλλοίωτος.

Τέλος, αν το $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές σύνολο, η σχέση $SP = PSP$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$ εφαρμόζεται και στο $S^*$, άρα $S^*P = PS^*P$, οπότε $PS = PSP$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$ και συνεπώς $SP = PSP = PS$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$.

Αντίστοφα αν $SP = PS$ τότε $SP = SPP = PSP$ και άρα ο $H_0$ είναι $S$-αναλλοίωτος. □

Απόδειξη του Θεωρήματος του von Neumann

Επειδή $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''$ και η $\mathcal{A}''$ είναι sot-κλειστή, έχουμε $\overline{\mathcal{A}}^{\text{sot}} \subseteq \mathcal{A}''$.

Μένει να δειχθεί ότι $\mathcal{A}'' \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\text{sot}}$.

Έστω $T \in \mathcal{A}''$ και $\mathcal{W} = \mathcal{W}(T, \vec{x}_0, \epsilon)$ μια (βασική) sot-περιοχή του $T$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{W} \cap \mathcal{A} \neq 0$, δηλαδή ότι υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\left\| T^{(n)}\vec{x}_0 - A^{(n)}\vec{x}_0 \right\|_{H^{(n)}} < \epsilon \,.$$

Ας εξετάσουμε [3] πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$H_0 := \overline{\{Ax_0 : A \in \mathcal{A}\}} \subseteq H$$

και ονομάζουμε $P$ την προβολή στον $H_0$.

Παρατηρούμε ότι ο $H_0$ είναι αναλλοίωτος από κάθε $A \in \mathcal{A}$: πράγματι κάθε $y \in H_0$ είναι της μορφής $y = \lim_n A_n x_0$ για κάποια ακολουθία $(A_n)$ από την $\mathcal{A}$, οπότε $Ay = \lim_n AA_n x_0 \in H_0$ αφού $AA_n \in \mathcal{A}$ (η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα). Από το Λήμμα, έπεται ότι $P \in \mathcal{A}'$.

Όμως $T \in \mathcal{A}''$, άρα $TP = PT$. Έπεται ότι $TP = PTP$, πράγμα που σημαίνει (πάλι από το Λήμμα) ότι ο $H_0$ είναι $T$-αναλλοίωτος. Παρατηρούμε όμως ότι

$$x_0 \in H_0, \quad \text{αφού } I \in \mathcal{A}\,. \tag{**}$$

Έπεται ότι $Tx_0 \in H_0 = \overline{\{Ax_0 : A \in \mathcal{A}\}}$, οπότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\|Tx_0 - Ax_0\|_H < \epsilon$.

Στη γενική περίπτωση ($n$ αυθαίρετο) θεωρούμε τον υπόχωρο

$$K_0 := \overline{\{A^{(n)}\vec{x}_0 : A \in \mathcal{A}\}} \subseteq K := H^{(n)}$$

και ονομάζουμε $Q$ την προβολή στον $K_0$.

Παρατηρούμε ομοίως ότι ο $K_0$ είναι αναλλοίωτος από κάθε $A^{(n)} \in \mathcal{A}^{(n)}$ (η $\mathcal{A}^{(n)}$ είναι άλγεβρα). Από το Λήμμα, έπεται ότι $Q \in (\mathcal{A}^{(n)})'$.

*Ισχυρισμός.* Ο $T^{(n)}$ μετατίθεται με την $Q$, δηλαδή $T^{(n)}Q = QT^{(n)}$.

Πράγματι: Ας γράψουμε τον $Q$ ως $n \times n$ πίνακα $[Q_{ij}]$ με τιμές $Q_{ij} \in \mathcal{B}(H)$. Για κάθε τελεστή $X \in \mathcal{B}(H)$, ο $QX^{(n)}$ αντιστοιχεί στον πίνακα $[Q_{ij}X]$ και ο $X^{(n)}Q$ αντιστοιχεί στον πίνακα $[XQ_{ij}]$. Αφού λοιπόν ο τελεστής $Q$ μετατίθεται με τον διαγώνιο πίνακα τελεστών $A^{(n)}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, κάθε $Q_{ij}$ θα ανήκει στον $\mathcal{A}'$. Όμως από την υπόθεση έχουμε $T \in (\mathcal{A}')'$ οπότε ο $T$ μετατίθεται με κάθε $Q_{ij}$. Έπεται ότι ο διαγώνιος $T^{(n)}$ μετατίθεται με τον $Q = [Q_{ij}]$, και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα για τον τελεστή $T^{(n)}$, συμπεραίνουμε από τον Ισχυρισμό ότι ο $T^{(n)}$ αφήνει τον υπόχωρο $K_0$ αναλλοίωτο. Αλλά

$$\vec{x}_0 \in K_0, \quad \text{αφού } I_K \in \mathcal{A}^{(n)}\,. \tag{***}$$

Έπεται ότι $T^{(n)}\vec{x}_0 \in K_0 = \overline{\{A^{(n)}\vec{x}_0 : A \in \mathcal{A}\}}$, οπότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\left\|T^{(n)}\vec{x}_0 - A^{(n)}\vec{x}_0\right\|_{H^{(n)}} < \epsilon\,.$ □

[3] Εξετάζουμε την ειδική περίπτωση μόνο για καλύτερη κατανόηση. Η γενική περίπτωση δεν χρησιμοποιεί το βήμα αυτό.

Εναλλακτική διατύπωση: Θα λέμε ότι ένα αυτοσυζυγές σύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι μη εκφυλισμένο ή δρα μη εκφυλισμένα αν για κάθε $x \in H, x \neq 0$ υπάρχει $S \in \mathcal{S}$ ώστε $Sx \neq 0$.

**Πρόταση 2.** *Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγές μη εκφυλισμένο. Αν $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ είναι η άλγεβρα που παράγεται από το $\mathcal{S}$, τότε*

$$\mathcal{S}'' = \overline{\mathcal{A}(\mathcal{S})}^{\text{sot}}$$

*Απόδειξη.* Η $\mathcal{A}(\mathcal{S}))$ είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα. Επίσης, εύκολα φαίνεται ότι $\mathcal{S}' = \mathcal{A}(\mathcal{S})'$ και συνεπώς $\mathcal{S}'' = \mathcal{A}(\mathcal{S})''$. Όμως η $\mathcal{A}(\mathcal{S}))$ μπορεί να μην περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή.

Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη του Θεωρήματος von Neumann η υπόθεση $I \in \mathcal{A}$ χρησιμοποιήθηκε μόνον (στα σημεία (**) και (***)) για να δείξουμε ότι $x_0 \in H_0$ (αντίστοιχα $\vec{x}_0 \in K_0$). Αυτό όμως έπεται από την μη εκφυλισμένη δράση του $\mathcal{S}$ στον $H$ (αντίστοιχα του $\mathcal{S}^{(n)}$ στον $H^{(n)}$ ).

Πράγματι, αφού η $Q = \text{proj}(K_0)$ μετατίθεται με την $(\mathcal{A}(\mathcal{S}))^{(n)}$, άρα και με το $\mathcal{S}^{(n)}$,έχουμε για κάθε $S \in \mathcal{S}$

$$S^{(n)}(\vec{x}_0 - Q\vec{x}_0) = S^{(n)}(I - Q)\vec{x}_0 = (I - Q)S^{(n)}\vec{x}_0 \,.$$

Αλλά ο $K_0$ είναι $\mathcal{S}^{(n)}$-αναλοίωτος, άρα $S^{(n)}\vec{x}_0 \in K_0$ οπότε $S^{(n)}\vec{x}_0 = QS^{(n)}\vec{x}_0$ και η προηγούμενη σχέση δίνει

$$S^{(n)}(\vec{x}_0 - Q\vec{x}_0) = (I - Q)S^{(n)}\vec{x}_0 = (I - Q)QS^{(n)}\vec{x}_0 = 0$$

για κάθε $S^{(n)} \in \mathcal{S}^{(n)}$. Αφού το $\mathcal{S}^{(n)}$ είναι μη εκφυλισμένο, έχουμε λοιπόν $(\vec{x}_0 - Q\vec{x}_0) = 0$, άρα $\vec{x}_0 = Q\vec{x}_0 \in K_0$, όπως θέλαμε.

Επομένως, επαναμβάνοντας την απόδειξη του Θεωρήματος von Neumann συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A}(\mathcal{S})'' = \overline{\mathcal{A}(\mathcal{S})}^{\text{sot}}$ και συνεπώς $\mathcal{S}'' = \overline{\mathcal{A}(\mathcal{S})}^{\text{sot}}$. □

**Παράδειγμα 2.** *Η C* άλγεβρα $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$ των συμπαγών τελεστών σ' ένα χώρο Hilbert $H$ είναι C* άλγεβρα, αλλά δεν περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή, όταν* $\dim H = \infty$*, και δεν είναι* sot *κλειστή. Η $\mathcal{K}$ είναι μη εκφυλισμένη. Η* sot*-κλειστή θήκη της είναι όλος ο $\mathcal{B}(H)$.*

*Απόδειξη. Η $\mathcal{K}$ δεν είναι* sot *κλειστή*: Παράδειγμα: αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον $H$ και θέσουμε $P_n := \text{proj}(\text{span}\{x_1, \dots, x_n\})$, κάθε $P_n$ είναι συμπαγής (πεπερασμένης τάξης), όμως η $(P_n)$ συγκλίνει sot στην προβολή $P$ στον κλειστό υπόχωρο $H_0$ που παράγει η $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (εξηγείστε γιατί), που είναι απειροδιάστατος, άρα η $P$ δεν είναι συμπαγής.

*Η $\mathcal{K}$ είναι μη εκφυλισμένη*: Έστω $x \in H$ ώστε $Kx = 0$ για κάθε $K \in \mathcal{K}$. Δείχνουμε ότι $x = 0$. Αν $y \in H$, $y \neq 0$, έχουμε $yx^* \in \mathcal{K}$ άρα $yx^*(x) = 0$, δηλαδή $\langle x, x\rangle y = 0$ και συνεπώς $\|x\|^2 = 0$.

*Η* sot*-κλειστή θήκη της $\mathcal{K}$ είναι ο $\mathcal{B}(H)$*: Αφού δείξαμε ότι η $\mathcal{K}$ είναι μη εκφυλισμένη, αρκεί από την Πρόταση **??** να δείξουμε ότι $\mathcal{K}'' = \mathcal{B}(H)$, ή ισοδύναμα ότι $\mathcal{K}' = \mathcal{B}(H)'$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με όλους τους συμπαγείς, τότε μετατίθεται με όλους τους τελεστές.

Από την υπόθεση, ο $T$ θα μετατίθεται με κάθε $xy^*$ $(x, y \in H)$. Σταθεροποιώντας ένα $y$ νόρμας 1 έχουμε

$$\begin{aligned} T(xy^*) &= (xy^*)T \\ \text{ισοδύναμα } (Tx)y^* &= x(T^*y)^* \\ \text{άρα } (Tx)y^*(y) &= x(T^*y)^*(y) \\ \text{δηλαδή } (Tx)\langle y, y\rangle &= x\langle y, T^*y\rangle \\ \text{ή } Tx &= \langle y, T^*y\rangle x \qquad \text{για κάθε } x \in H\,. \end{aligned}$$

Έχουμε δηλαδή $T = \langle y, T^*y\rangle I_H$, που μετατίθεται με κάθε τελεστή. □

## Unitary representations of groups

Έστω $G$ μια ομάδα. Unitary αναπαράσταση της ομάδας $G$ σ' έναν χώρο Hilbert $H$ ονομάζουμε μια απεικόνιση $\pi : G \to \mathcal{B}(H)$ ώστε κάθε $\pi(g)$ να είναι unitary τελεστής και η $\pi$ να διατηρεί τη δομή ομάδας, δηλαδή

$$\pi(gh^{-1}) = \pi(g)\pi(h^{-1}) \quad \text{για κάθε } \; g, h \in G\,.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\pi(G) \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγές, συνεπώς η $\pi(G)'$ είναι άλγεβρα von Neumann.

Κάθε προβολή $P \in \pi(G)'$ ορίζει έναν κλειστό υπόχωρο $PH$ που είναι $\pi(G)$-αναλλοίωτος, και αντίστροφα, η ορθή προβολή σε κάθε $\pi(G)$-αναλλοίωτο υπόχωρο ανήκει στην $P \in \pi(G)'$.

Επομένως για κάθε προβολή $P \in \pi(G)'$ μπορούμε να ορίσουμε, για κάθε $g \in G$, τον τελεστή $\pi_P(g) \in \mathcal{B}(PH)$ από τη σχέση

$$\pi_P(g) := \pi(g)|_{PH}\,.$$

Είναι άμεσο ότι η απεικόνιση

$$G \to \mathcal{B}(PH) : g \mapsto \pi_P(g)$$

είναι unitary αναπαράσταση της $G$ στον χώρο Hilbert $PH$. Η $\pi_P$ ονομάζεται υπο-αναπαράσταση (subrepresentation) της $\pi$.

Κάθε υπο-αναπαράσταση της $\pi$ προκύπτει περιορίζοντας τους τελεστές $\{\pi(g) : g \in G\}$ σ' έναν (κλειστό) $\pi(G)$-αναλλοίωτο υπόχωρο $K \subseteq H$. Η προβολή $P_K$ στον $K$ μετατίθεται με κάθε $\pi(g)$, επομένως ανήσκει στην άλγεβρα von Neumann $\pi(G)'$.

Έχουμε λοιπόν μια αμφιμονοσήμαντη αντοιστοιχία μεταξύ προβολών της $\pi(G)'$ και υπο-αναπαραστάσεων της $\pi$.

## Η άλγεβρα von Neumann μιας ομάδας

Έστω $G$ μια (αριθμήσιμη) ομάδα. *(Για παράδειγμα, το $\mathbb{Z}$ ή η $\mathbb{F}_2$.)* Θεωρούμε τον χώρο Hilbert

$$\ell^2(G) = \ell^2 G = \{f : G \to \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |f(t)|^2 < \infty\}\,.$$

Ο $\ell^2(G)$ έχει ορθοκανονική βάση $\{\delta_t : t \in G\}$, όπου $\delta_t(s) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s = t \\ 0 & \text{αν } s \neq t \end{cases}$.

Για κάθε $s \in G$ ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\lambda_s : \delta_t \to \delta_{st}$$

και επεκτείνουμε γραμμικά σε απεικόνιση $\lambda_s : c_{00}G \to c_{00}G$. Η επέκταση αυτή είναι ισομετρία στην νόρμα του $\ell^2$.

Πράγματι, αν $f = \sum_t f(t)\delta_t \in c_{00}G$, έχουμε

$$\|\lambda_s(f)\|_2^2 = \left\|\sum_t f(t)\lambda_s\delta_t\right\|_2^2 = \left\|\sum_t f(t)\delta_{st}\right\|_2^2 = \sum_t |f(t|^2 = \|f\|_2^2\,.$$

Επομένως η $\lambda_s$ επεκτείνεται σε μια ισομετρία $\lambda_s : \ell^2(G) \to \ell^2(G)$. Η $\lambda_s$ είναι και επί, συνεπώς unitary. Παρατηρούμε ότι

$$\text{Αν } \; f \in \ell^2(G), \quad (\lambda_s f)(t) = f(s^{-1}t).$$

Η απεικόνιση $s \mapsto \lambda_s : G \to \mathcal{B}(\ell^2 G)$ είναι unitary αναπαράσταση της $G$ στον χώρο $\ell^2 G$ και λέγεται η αριστερή κανονική αναπαράσταση (left regular representation) της $G$ στον $\ell^2 G$. Πράγματι, για κάθε $s, t \in G$ έχουμε $\lambda_{st} = \lambda_s\lambda_t$ και $\lambda_{ss^{-1}} = I$: αρκεί να ελέγξουμε τις ισότητες στην ορθοκανονική βάση του $\ell^2 G$: για κάθε $x \in G$,

$$\begin{aligned} \lambda_{st}\delta_x &= \delta_{(st)x} = \delta_{s(tx)} = \lambda_s\delta_{tx} = \lambda_s\lambda_t\delta_x\,, \quad \text{άρα } \lambda_{st} = \lambda_s\lambda_t \\ \text{και} \quad \delta_x &= \lambda_e\delta_x = \lambda_{ss^{-1}}\delta_x = \lambda_s\lambda_{s^{-1}}\delta_x\,, \quad \text{άρα } I = \lambda_s\lambda_{s^{-1}} \end{aligned}$$

και ομοίως $I = \lambda_{s^{-1}}\lambda_s$.

**Ορισμός 5.** *Συμβολίζουμε* $\mathrm{vN}(G)$ *ή* $\mathcal{L}(G)$ *την* sot-*κλειστή γραμμική θήκη της ομάδας των unitary τελεστών* $\{\lambda_t : t \in G\}$, *δηλαδή*

$$\mathcal{L}(G) := \overline{\mathrm{span}\{\lambda_t : t \in G\}}^{\mathrm{sot}} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(G))\,.$$

*Η* $\mathcal{L}(G)$ *ονομάζεται η άλγεβρα von Neumann της ομάδας.*

**Παράδειγμα 3.** *Αν* $\mathbb{F}_n$*: η ελεύθερη ομάδα με* $n$ *γεννήτορες, είναι άγνωστο αν* $\mathcal{L}(\mathbb{F}_n) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{F}_m)$ *για* $n > m \geqslant 2$.

Δείτε τις εξαιρετικές σημειώσεις του V.F.R. Jones στο
`https://math.berkeley.edu/ vfr/MATH20909/VonNeumann2009.pdf` ιδιαίτερα την παράγραφο 3.3.