Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-22

Περιγραφή

Στόχος Εφαρμογές των *C^*-αλγεβρών*, των *συστημάτων τελεστών* (operator systems), των *χώρων τελεστών* (operator spaces), των *πλήρως θετικών* (completely positive) και *πλήρως φραγμένων* (completely bounded) απεικονίσεων ιδιαίτερα στην κβαντική θεωρία πληροφορίας (quantum information theory).

Περιεχόμενα Επισκόπηση: Χώροι Hilbert. Οικογένειες γραμμικών τελεστών σε χώρους Hilbert. Συμπαγείς τελεστές, τελεστές ίχνους (trace class) και Hilbert-Schmidt, θεωρήματα δυισμού.

Εισαγωγή στις C*-άλγεβρες και άλγεβρες Von Neumann. Θεωρία GNS, θεώρημα διαστολής Stinespring, θεώρημα επέκτασης Arveson.

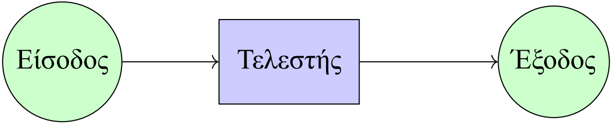
Εξειδίκευση σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, εφαρμογές στην κβαντική θεωρία πληροφορίας.

Δείτε και τη βιβλιογραφία στο biblio21.pdf

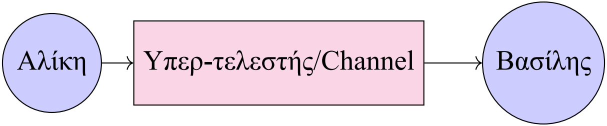
Γουατ ιζ αν Οπερέιτωρ?

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

[Εργαστήριο Αλίκης]



Μετάδοση Πληροφοριών



Τελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]

[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης → Βασίλη]

Κβαντικά κανάλια

Ένα κβαντικό κανάλι είναι (προσωρινά...) μια απεκόνιση

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_k(\mathbb{C})$$

της μορφής $X \mapsto A^* X A$ ή

$$X \mapsto \sum_{i=1}^{r} A_i^* X A_i \quad (A_i : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n,\ A_i \in M_{n,k}(\mathbb{C}))$$

που διατηρεί το ίχνος Tr ($\iff \sum A_i A_i^* = Id$).

«Δυικά» έχουμε την κλάση των UCP απεικονίσεων
$\Psi : M_k(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ (πλήρως θετικές (CP) και μοναδιαίες (U)).

Για τη μελέτη τους χρησιμοποιούμε τη θεωρία των
Χώρων Τελεστών (Operator Space theory).

Χώροι Τελεστών (Operator Spaces)

Ένας χώρος τελεστών $\mathcal{X}$ είναι ένας υπόχωρος του χώρου $\mathcal{B}(H)$ των γραμμικών και φραγμένων τελεστών σε κάποιον (μιγαδικό) χώρο Hilbert H
(συχνά πεπερασμένης διάστασης, οπότε $H \simeq \ell^2[n] := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$).

Ο $\mathcal{X}$ κληρονομεί από τον $\mathcal{B}(H)$ τη νόρμα $\|\cdot\|$:
$\|a\| := \sup\{\|a\xi\|_H : \|\xi\|_H \leq 1\}$.

Κάθε $n \times n$ πίνακας τελεστών στον H είναι επίσης τελεστής (στον H^n).
(Αν $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ τότε δρα στον H^n με πολλ/σμό πινάκων:
$[a_{ij}][\xi_j] = [\sum_k a_{ik}\xi_k]$.)

Συνεπώς κάθε $M_n(\mathcal{X})$ κληρονομεί τη νόρμα $\|\cdot\|_n$ του $\mathcal{B}(H^n)$.
Δηλαδή, εκτός απ' τον $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, έχουμε και την οικογένεια
$\{(M_n(\mathcal{X}), \|\cdot\|_n), n \in \mathbb{N}\}$.

Πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ μεταξύ χώρων τελεστών επάγει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια απεικόνιση
$\Phi_n : M_n(\mathcal{X}) \to M_n(\mathcal{Y}) : [x_{ij}] \to [\Phi(x_{ij})]$.

Η Φ λέγεται πλήρως φραγμένη (completely bounded) αν
$\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi_n\| < \infty$.

Σημ: $\|\Phi_n\| = \sup\{\left\|[\Phi(x_{ij})]\right\|_n : x_{ij} \in \mathcal{X}, \left\|[x_{ij}]\right\|_n \leq 1\}$.

Θετικές και πλήρως θετικές απεικονίσεις

Υπενθύμιση: Ένας τελεστής $a \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός ή θετικά ημιορισμένος αν $a = a^*$ και $\langle \xi, a\xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.
Οι κβαντικές καταστάσεις αντιστοιχούν (τουλάχιστον όταν $\dim H < \infty$) σε θετικούς τελεστές με ίχνος =1.

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ μεταξύ χώρων τελεστών $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}(K)$ λέγεται θετική (positive) αν στέλνει θετικούς $a \in \mathcal{X}$ σε θετικούς $\Phi(a) \in \mathcal{Y}$.

Η Φ λέγεται πλήρως θετική (completely positive) αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\Phi_n : M_n(\mathcal{X}) \to M_n(\mathcal{Y})$ είναι θετική,
δηλαδή για κάθε $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{X})$ που ορίζει θετικό τελεστή στον χώρο H, ο $[\Phi(a_{ij})] \in M_n(\mathcal{Y})$ ορίζει θετικό τελεστή στον χώρο K.