# Ευθέα αθροίσματα και η καθολική αναπαράσταση

## 1 Ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert

### 1.1 Δύο χώροι

Αν $H_1, H_2$ είναι χώροι Hilbert ορίζουμε

$$H_1 \oplus H_2 := H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_i \in H_i \right\}$$

Με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη και το εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2} .$$

(δηλαδή με τη νόρμα $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2}$), ο $H_1 \oplus H_2$ είναι χώρος Hilbert.

Αν $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, ορίζουμε $T = T_1 \oplus T_2$ από τη σχέση

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_(x_1) \\ T_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση $T_1 \oplus T_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

*Χρήσιμη Άσκηση:*

$$\|T_1 \oplus T_2\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\} .$$

### 1.2 Πολλοί χώροι

Αν δοθεί ένα σύνολο $\{H_i : i \in I\}$ χώρων Hilbert, σχηματίζουμε πρώτα *το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα*

$$H_0 := \{(x_i)_i \in I : x_i \in H_i \text{ και } x_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$$

με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη. Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (x_i), (y_i) \rangle_0 := \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_{H_i}$$

(Παρατηρείστε ότι στο άθροισμα αυτό υπάρχουν μόνον πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων.) Εύκολα ελέγχονται οι ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου. Η νόρμα που επάγεται είναι η

$$\|(x_i)\|_0 := \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|_{H_i}^2 \right)^{1/2} .$$

**Συμβολισμός** Αν $a_i \in \mathbb{R}_+$ γράφουμε

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup\left\{\sum_{i\in J} a_i : J \subseteq I \text{ finite }\right\} \in [0, +\infty] .$$

**Ορισμός 1.** *Το* **ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert** $H := \bigoplus_{i\in I} H_i$ *είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων* $\xi = (\xi_i)$ *με* $\xi_i \in H_i$ *για κάθε* $i \in I$ *και* $\sum_{i\in I} \|\xi_i\|_{H_i}^2 < \infty$ .

**Άσκηση 1.** *Το ευθύ άθροισμα* $H := \bigoplus H_i$ *είναι πλήρης χώρος ως προς τη νόρμα* $\|\xi\|_H := \left(\sum_{i\in I} \|\xi_i\|_{H_i}^2\right)^{1/2}$.

*Κάθε* $\xi \in H$ *έχει αριθμήσιμο φορέα* $J_\xi := \{j \in I : \xi_j \neq 0\}$. *Επομένως για κάθε* $\xi, \eta \in H$ *η απεικόνιση* $I \to \mathbb{C} : i \to \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{H_i}$ *μηδενίζεται έξω απ' το αριθμήσιμο σύνολο* $J_\xi$. *Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{i\in J_\xi} \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{H_i}$$

*που επάγει τη νόρμα* $\|\cdot\|_H$.

*Κάθε* $H_j$ *εμφυτεύεται ισομετρικά στον* $H$ *μέσω της απεικόνισης* $H_j \to H : x \to (x_i)$ *όπου* $x_i = x\delta_{ij}$. *Το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα* $(H_0, \|\cdot\|_0)$ *είναι ισομετρικό με έναν πυκνό υπόχωρο του* $H$.

*Απόδειξη της πληρότητας.* Έστω $(\xi_n)$ βασική ακολουθία στον $H$ και $\epsilon > 0$.
Υπάρχει $n_0$ ώστε $\|\xi_n - \xi_m\|_H < \epsilon$ για κάθε $m, n \geqslant n_0$.
Αν $\xi_n = (\xi_n(i))_{i\in I}$, τότε $\|\xi_n(i) - \xi_m(i)\|_{H_i} \leqslant \|\xi_n - \xi_m\|_H < \epsilon$ για κάθε $i \in I$.
Από την πληρότητα του $H_i$, υπάρχει $\xi(i) \in H_i$ ώστε $\lim_m \|\xi(i) - \xi_m(i)\|_{H_i} = 0$ για κάθε $i \in I$.
Για κάθε *πεπερασμένο* $J \subseteq I$ έχουμε $\sum_{i\in J} \|\xi_n(i) - \xi_m(i)\|_{H_i}^2 \leqslant \|\xi_n - \xi_m\|_H^2 < \epsilon^2$ για κάθε $m, n \geqslant n_0$, οπότε $\sum_{i\in J} \|\xi_n(i) - \xi(i)\|_{H_i}^2 = \lim_m (\sum_{i\in J} \|\xi_n(i) - \xi_m(i)\|_{H_i}^2) \leqslant \epsilon^2$ όταν $n \geqslant n_0$.
Συνεπώς $\|\xi - \xi_n\|_H^2 = \sup_J \{\sum_{i\in J} \|\xi(i) - \xi_n(i)\|_{H_i}^2 : J \subseteq I \text{ πεπερ.}\} \leqslant \epsilon^2$ όταν $n \geqslant n_0$.
Αυτό δείχνει ότι $\xi - \xi_n \in H$ άρα $\xi \in H$ και ότι $\lim_n \|\xi - \xi_n\|_H = 0$.

## 2 Ευθύ άθροισμα τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$.

Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \to H_0 : (x_i) \to (T_i x_i) .$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\text{supp}(T_i x_i) \subseteq \text{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον $H$:

Παρατήρησε ότι αν $j \in I$ και $x \in H_j$ θέτοντας $\xi = (x\delta_{ij})_i \in H_0$ έχουμε $T_0\xi = (T_j x\delta_{ij})_i$, άρα $\|T_0\xi\|_H = \|T_j x\|_{H_j}$ οπότε $\|T_0\| \geqslant \|T_j\|$. Επομένως αναγκαία συνθήκη για να είναι ο $T_0$ συνεχής είναι η

$$\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty .$$

**Πρόταση 2.** *Μια οικογένεια* $(T_i)$ *με* $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ *ορίζει φραγμένο τελεστή* $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$ *που επεκτείνει τον* $T_0$ *αν και μόνον αν* $\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. *Μάλιστα*

$$\left\| \bigoplus_i T_i \right\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} .$$

*Απόδειξη.* Έστω $M = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\}$. Αν $M = +\infty$, ο $T_0$ δεν είναι συνεχής στον $H_0$, άρα δεν έχει συνεχή επέκταση στον $\bigoplus H_i$. Αν $M < +\infty$, τότε για κάθε $x = (x_i) \in H_0$,

$$\|T_0 x\|_0^2 = \sum_{i \in I} \|T_i x_i\|_{H_i}^2 \leqslant \sum_{i \in I} M^2 \|x_i\|_{H_i}^2 = M^2 \|x\|_0^2$$

άρα ο $T_0$ είναι φραγμένος στην $\|\cdot\|_0$ από το $M$. Άρα επεκτείνετι σε φραγμένο τελεστή $T$ στον $\bigoplus H_i$ με $\|T\| = \|T_0\| \leqslant M$. Δείξαμε όμως προηγουμένως ότι $\|T_0\| \geqslant M$. □

# 3 Ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα. Έστω ότι για κάθε $i \in I$ δίδεται μια αναπαράσταση $(\pi_i, H_i)$. Τότε για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε μια οικογένεια $(\pi_i(a))$ φραγμένων τελεστών $\pi_i(a) \in \mathcal{B}(H_i)$ και ξέρουμε ότι $\|\pi_i(a)\|_{\mathcal{B}(H_i)} \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}}$ για κάθε $i$. Επομένως $\sup_i \|\pi_i(a)\|_{\mathcal{B}(H_i)} \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}}$ οπότε μπορούμε να ορίσουμε:

$$\pi(a) := \oplus_{i \in I} \pi_i(a) : \oplus H_i \to \oplus H_i : (x_i) \to (\pi_i(a) x_i) .$$

Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\oplus H_i) : a \to \pi(a)$$

και $\|\pi(a)\| = \sup_i \|\pi_i(a)\| \leqslant \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

*Ισχυρισμός:* Η $\pi$ είναι μια *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$, δηλαδή για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(a + \lambda b) &= \pi(a) + \lambda \pi(b) \\ \pi(ab) &= \pi(a)\pi(b) \\ \pi(a^*) &= (\pi(a))^* . \end{aligned}$$

Οι σχέσεις αυτές ελέγχονται πολύ εύκολα κατά σημείο. Μάλιστα, αφού αφορούν ισότητες *φραγμένων* τελεστών, αρκεί να τις ελέγξουμε στα σημεία του πυκνού υποχώρου $H_0$. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} \langle \pi(a^*)(x_i), (y_i) \rangle_H &= \langle (\pi_i(a^*) x_i), (y_i) \rangle_H = \sum_i \langle \pi_i(a^*) x_i, y_i \rangle_{H_i} \\ &= \sum_i \langle \pi_i(a)^* x_i, y_i \rangle_{H_i} = \sum_i \langle x_i, \pi_i(a) y_i \rangle_{H_i} \\ &= \langle (x_i), (\pi_i(a) y_i) \rangle_H = \langle (x_i), \pi(a)(y_i) \rangle_H \\ &= \langle \pi(a)^*(x_i), (y_i) \rangle_H \quad \text{για κάθε } (x_i), (y_i) \in H_0 \end{aligned}$$

και συνεπώς $\pi(a^*) = (\pi(a))^*$.

# 4 Η καθολική αναπαράσταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα. Θεωρώ το σύνολο $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ όλων των καταστάσεων (states) της $\mathcal{A}$. Για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$ θεωρούμε την τριάδα GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$.

**Ορισμός 2.** *Η **καθολική αναπαράσταση** της $\mathcal{A}$ είναι η $(\pi, H)$ όπου*

$$H := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} H_\phi \quad \textit{και} \quad \pi(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} \pi_\phi(a), \ \ a \in \mathcal{A}\,.$$

Στόχος: να αποδείξουμε το

**Θεώρημα 3** (Gelfand-Naimark). *Η καθολική αναπαράσταση είναι πιστή, δηλ. 1-1.*

*Επομένως κάθε C*-άλγεβρα αναπαρίσταται ισομετρικά και *-ισομορφικά ως πιστή C* υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{B}(H)$ των τελεστών σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert.*

*Σχόλια* Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ ισχύει ότι $\pi(a) \neq 0$, δηλαδή $\oplus_{\phi\in\mathcal{S}}\pi_\phi(a) \neq 0$. Ισοδύναμα, πρέπει να δείξουμε ότι κάποιος προσθετέος $\pi_\phi(a)$ δεν είναι ο μηδενικός τελεστής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε κάποια $\phi = \phi_a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\pi_\phi(a)\xi_\phi \neq 0$. Όμως,

$$\|\pi_\phi(a)\xi_\phi\|^2_{H_\phi} = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \pi_\phi(a)\xi_\phi\rangle_{H_\phi} = \langle \pi_\phi(a^*a)\xi_\phi, \xi_\phi\rangle_{H_\phi} = \phi(a^*a)\,.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

**Πρόταση 4.** *Για κάθε $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a^*a) \neq 0$.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να υποθέσω ότι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα (αλλιώς, δουλεύω στην $\mathcal{A}^\sim$).
Έστω $b := a^*a$. Υπενθυμίζω ότι η C*-άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, b)$ γράφεται $C^*(\mathbf{1}, b) = \{f(b) : f \in C(\sigma(b))\}$. Αν $\lambda_0 := \max \sigma(b) = \|b\|$, ορίζω

$$\omega : C^*(\mathbf{1}, b) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \omega(f(b)) = f(\lambda_0) \quad (f \in C(\sigma(b))\,.$$

Από το θεώρημα Hahn-Banach, η $\omega$ έχει γραμμική επέκταση $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ με $\|\phi\| = \|\omega\| = 1$, οπότε $\|\phi\| = 1 = \phi(\mathbf{1})$. Από την Πρόταση 5 που ακολουθεί έπεται ότι η $\phi$ είναι κατάσταση, και $\phi(a^*a) = \omega(b) = \lambda_0 = \|a^*a\|$. □

**Πρόταση 5.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ γραμμική μορφή. Η $\omega$ είναι θετική αν και μόνον αν $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1})$.*

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ήδη ότι μια θετική γραμμική μορφή ικανοποιεί $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1})$. Για το αντίστροφο, διαιρώντας με $\|\omega\|$ εν ανάγκη μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1}) = 1$. Θα δείξουμε ότι $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Θα παρουσιάσουμε δυο διαφορετικές αποδείξεις.

*Πρώτη προσέγγιση.* Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ με $a = a^*$ ισχύει ότι $\omega(a) \in \mathbb{R}$. Έστω λοιπόν $\omega(a) = \lambda + i\mu$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, να δείξουμε ότι $\mu = 0$.

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε το $b_n = a + in\mathbf{1}$ και έχουμε

$$\omega(b_n) = \omega(a) + in\omega(\mathbf{1}) = \lambda + i(\mu + n) \quad \text{αφού } \omega(\mathbf{1}) = 1.$$

Επομένως, $\quad \lambda^2 + (\mu + n)^2 = |\omega(b_n)|^2 \leqslant \|b_n\|^2 \quad$ αφού $\|\omega\| = 1$.

$$\text{Άρα } \lambda^2 + \mu^2 + n^2 + 2\mu n \leqslant \|b_n^* b_n\| = \left\|a^2 + n^2\mathbf{1}\right\| \leqslant \left\|a^2\right\| + n^2$$
$$\text{δηλαδή, } 2\mu n \leqslant \left\|a^2\right\| - \lambda^2 - \mu^2 .$$

Η ανισότητα αυτή δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, παρά μόνον αν $\mu = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\omega(a) \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα $a \geqslant 0$ και $\|a\| \leqslant 1$. Έχουμε τότε $\sigma(\mathbf{1} - a) \subseteq [0, 1]$ άρα $\|\mathbf{1}–a\| \leqslant 1$. Επομένως

$$|1–\omega(a)| = |\omega(\mathbf{1}–a)| \leqslant 1.$$

Αφού $\omega(a) \in \mathbb{R}$, έπεται τώρα ότι $\omega(a) \geqslant 0$.

Δείξαμε ότι η $\omega$ είναι θετική γραμμική μορφή.

*Δεύτερη προσέγγιση.* Έστω $a \in \mathcal{A}_+$, να δείξουμε ότι ο μιγαδικός αριθμός $\omega(a)$ ανήκει στο $\mathbb{R}_+$ και μάλιστα $\omega(a) \in [0, \|a\|]$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε θα υπάρχει μια κλειστή μπάλα $\bar{B}(z, r) \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει το $[0, \|a\|]$ αλλά δεν περιέχει το $\omega(a)$ (αρκεί να πάρουμε κατάλληλο κέντρο $z$ με Re$z = \frac{\|a\|}{2}$ με ακτίνα $r = |z - \|a\| \,|$ αρκετά μεγάλη).

Δηλαδή $\lambda \in \bar{B}(z, r)$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$ αλλά $\omega(a) \notin \bar{B}(z, r)$. Θα έχουμε λοιπόν $|\omega(a) - z| > r$ και $|\lambda - z| \leqslant r$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$. Αφού το $a - z\mathbf{1}$ είναι φυσιολογικό στοιχείο,

$$\|a - z\mathbf{1}\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a - z\mathbf{1})\} \leqslant r$$

διότι $\sigma(a - z\mathbf{1}) = \{\lambda - z : \lambda \in \sigma(a)\}$. Από την άλλη όμως $\omega(\mathbf{1}) = 1$ οπότε

$$r < |\omega(a) - z| = |\omega(a - z\mathbf{1})| \leqslant \|\omega\| \, \|a - z\mathbf{1}\| \leqslant r$$

(αφού $\|\omega\| = 1$), άτοπο.