Ο συναρτησιακός λογισμός για αυτοσυζυγή στοιχεία

Σταθεροποιούμε έναν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν p είναι ένα πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ ($c_k \in \mathbb{C}$), θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).

Στόχος: να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f.

Γενικότερα, έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε πάλι $p(a) = \sum_{k=0}^n c_k a^k$,

Παρατήρηση. Η απεικόνιση $\Phi_\pi : p \to p(a)$ διατηρεί το άθροισμα $+$ και το γινόμενο $\cdot$.

Λήμμα 1 (φασματικής απεικόνισης)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μιγαδική άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Αν p είναι πολυώνυμο,*

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\} .$$

Απόδειξη Αν το p είναι σταθερό, το συμπέρασμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε τώρα ότι το p δεν είναι σταθερό. Αν $\mu \in \mathbb{C}$ θέτω $q(\lambda) = p(\lambda) - \mu \quad (\lambda \in \mathbb{C})$. Από το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, το πολυώνυμο q παραγοντοποιείται

$$q(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ρίζες του q και $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Επομένως

$$q(a) = c(a - \lambda_1 \mathbf{1})(a - \lambda_2 \mathbf{1}) \dots (a - \lambda_n \mathbf{1}) \in \mathcal{A} .$$

Παρατήρησε ότι, επειδή οι παράγοντες $a - \lambda_i \mathbf{1}$ μετατίθενται μεταξύ τους, το γινόμενό τους έχει αντίστροφο αν και μόνον αν καθένας έχει αντίστροφο. [1] Άρα η σχέση $\mu \notin \sigma(p(a))$, δηλαδή $q(a) = p(a) - \mu \mathbf{1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, ισοδυναμεί με την $a - \lambda_i \mathbf{1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, δηλαδή $\lambda_i \notin \sigma(a)$, για κάθε $i = 1, \dots n$. Επομένως $\mu \notin \sigma(p(a))$ αν και μόνον αν $\lambda \neq \lambda_i$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$, δηλαδή $q(\lambda) \neq 0$, ισοδύναμα $p(\lambda) \neq \mu$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$. $\square$

Πρόταση 2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$.*

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R} .$$

Απόδειξη Έστω $\lambda + i\mu \in \sigma(a)$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι $\mu = 0$. Αν $\mu \neq 0$, το στοιχείο $a - (\lambda + i\mu)\mathbf{1} = \mu(\frac{a - \lambda \mathbf{1}}{\mu} - i\mathbf{1})$ της $\mathcal{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Έπεται ότι, αν γράψουμε $b := \frac{a - \lambda \mathbf{1}}{\mu} \in \mathcal{A}$ θα έχουμε $b = b^*$ και $i \in \sigma(b)$. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί, για τον εξής λόγο:

Αν $i \in \sigma(b)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $(n\mathbf{1} - ib) - (n+1)\mathbf{1} = -i(b - i\mathbf{1})$ δεν είναι αντιστρέψιμο και συνεπώς $n + 1 \in \sigma(n\mathbf{1} - ib)$. Έπεται ότι $|n + 1| \leqslant \|n\mathbf{1} - ib\|$ και άρα

$$(n+1)^2 \leqslant \|n\mathbf{1} - ib\|^2 \stackrel{(C^*)}{=} \|(n\mathbf{1} - ib)^*(n\mathbf{1} - ib)\| \stackrel{(b=b^*)}{=} \|(n\mathbf{1} + ib)(n\mathbf{1} - ib)\| = \left\|n^2\mathbf{1} + b^2\right\| \leqslant n^2 + \left\|b^2\right\| .$$

Επομένως έχουμε $2n + 1 \leqslant \left\|b^2\right\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο. $\square$

Θεώρημα 3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ και $a = a^*$ τότε τότε, για κάθε πολυώνυμο p, η νόρμα του $p(a) \in \mathcal{A}$ είναι*

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} := \|p\|_{\sigma(a)} .$$

[1] Το $q(a)$ μπορεί να γραφεί $q(a) = (a - \lambda_k \mathbf{1})b_k = b_k(a - \lambda_k \mathbf{1})$ για κάποιο $b_k \in \mathcal{A}$. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(a))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι το $a - \lambda_k \mathbf{1}$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμο.

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι το $p(a)$ είναι φυσιολογικό: πράγματι, αφού $a = a^*$ έχουμε ότι και το $p(a)^* = \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k a^k$ είναι πολυώνυμο του a, άρα προφανώς μετατίθεται με το $p(a)$. Έχουμε όμως δείξει ότι, για φυσιολογικά στοιχεία, η νόρμα και η φασματική ακτίνα είναι ίσες, οπότε

$$\|p(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(a))\}.$$

Αλλά από το Λήμμα Φασματικής Απεικόνισης ξέρουμε ότι $\mu \in \sigma(p(a))$ αν και μόνον αν $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(a)$. Συνεπώς η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\}. \qquad \square$$

Θα επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(a)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε ότι η υπάλγεβρα $\mathcal{P}(\sigma(a)) \subseteq C(\sigma(a))$ των *πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* $\sigma(a)$ είναι πυκνή στην άλγεβρα $C(\sigma(a))$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ ως προς την νόρμα supremum. Αυτό έπεται είτε απευθείας από το Θεώρημα Stone-Weierstrass, είτε απ' το βασικό Θεώρημα Weierstrass, αν παρατηρήσει κανείς ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$, επεκτείνεται με την ίδια νόρμα σε μια συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $[-\|a\|, \|a\|]$, η οποία προσεγγίζεται από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο $[-\|a\|, \|a\|]$, άρα και στο $\sigma(a)$.

Θεώρημα 4 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))**.**
*Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ με $a = a^*$. Υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : f \to f(a)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στη μονάδα της $\mathcal{A}$ και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στο $a \in \mathcal{A}$.

Επίσης, ισχύει η ισότητα $\Phi_c(p) = p(a)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Απόδειξη. Ύπαρξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(a)$, τότε $p(a) = q(a)$ (πράγματι, $\|p(a) - q(a)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} = 0$). Επομένως το $p(a)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(a)$. Δηλαδή η απεικόνιση

$$\Phi_o : \; (\mathcal{P}(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : \;\; p \to p(a)$$

είναι καλά ορισμένη. Είναι φανερό ότι είναι μορφισμός αλγεβρών:

$$(p+q)(a) = p(a) + q(a) \quad \text{και} \quad (pq)(a) = p(a)q(a)$$

όταν τα p και q είναι πολυώνυμα, και ότι διατηρεί την ενέλιξη:
Αν $p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$, τότε

$$(p(a))^* = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k a^k\right)^* = \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k a^k = \bar{p}(a)$$

(αφού $a = a^*$). Αλλά από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε $\|\Phi_o(p)\| = \|p(a)\| = \|p\|_{\sigma(a)}$ για κάθε πολυώνυμο p, δηλαδή η Φ_o είναι γραμμική ισομετρία χώρων με νόρμα. Εφόσον η $\mathcal{P}(\sigma(a))$ είναι πυκνή στην $C(\sigma(a))$, έπεται ότι η Φ_o έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) $\Phi_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$.

Από τη συνέχεια της ενέλιξης και του γινομένου έπεται ότι η Φ_c είναι *-μορφισμός: αν $f, g \in C(\sigma(a))$ και (p_n), (q_n) είναι ακολουθίες πολυωνύμων με $\|f - p_n\|_{\sigma(a)} \to 0$ και $\|g - q_n\|_{\sigma(a)} \to 0$, τότε $\|fg - p_n q_n\|_{\sigma(a)} \to 0$, άρα, εφόσον $(p_n q_n)(a) = p_n(a) q_n(a)$,

$$\begin{aligned} & (fg)(a) = \lim_n (p_n q_n)(a) = \lim_n p_n(a) \lim_n q_n(a) = f(a) g(a) \\ \text{και} \quad & (f(a))^* = \lim_n (p_n(a))^* = \lim_n \bar{p}_n(a) = \bar{f}(a)\,. \end{aligned}$$

Μοναδικότητα: Αν Ψ είναι ένας συνεχής μορφισμός $C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ που ταυτίζεται με την Φ_c στα p_0 και p_1 τότε, αφού και οι δύο είναι μορφισμοί, θα ταυτίζονται σε δυνάμεις και γραμμικούς συνδυασμούς, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο. Εφόσον οι Φ_c και Ψ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς, θα ταυτίζονται και στα (ομοιόμορφα) όρια πολυωνύμων, δηλαδή σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. $\square$