Ο Συναρτησιακός Λογισμός για φυσιολογικά στοιχεία

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$. Θα γενικεύσουμε τον συναρτησιακό λογισμό

$$\Phi_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$$

για την περίπτωση που το a δεν είναι αναγκαστικά αυτοσυζυγές, αλλά είναι φυσιολογικό (όπως θα δούμε, η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία αν θέλουμε η Φ_c να διατηρεί την ενέλιξη).

Για την γενίκευση αυτή, θα χρειασθεί η θεωρία Gelfand για μεταθετικές C^* άλγεβρες.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα.

Λήμμα 1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $x \in \mathcal{A}$ με $x^*x = xx^*$. Αν $\mathcal{C} = C^*(\mathbf{1}, x)$ είναι η C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το x και την $\mathbf{1}$, τότε ο χώρος $\Omega(\mathcal{C})$ των χαρακτήρων της $\mathcal{C}$ είναι ομοιομορφικός με το φάσμα $\sigma(x)$ του x.*

Απόδειξη Η απεικόνιση

$$\hat{x} : \Omega(\mathcal{C}) \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(x)$$

είναι συνεχής (από τον ορισμό της τοπολογίας του χώρου $\Omega(\mathcal{C})$). Επειδή $\sigma(x) = \sigma_{\mathcal{C}}(a) = \{\phi(x) : \phi \in \Omega(\mathcal{C})\}$, η $\hat{x}$ απεικονίζει τον (συμπαγή Hausdorff) χώρο $\Omega(\mathcal{C})$ επί του $\sigma(x)$.

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι είναι 1-1. Έστω $\phi, \psi \in \Omega(\mathcal{C})$ με $\hat{x}(\phi) = \hat{x}(\psi)$, δηλαδή $\phi(x) = \psi(x)$. Τότε $\phi(x^n) = \psi(x^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά, όπως έχουμε δείξει, έχουμε $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ και $\psi(x^*) = \overline{\psi(x)}$, άρα $\phi(x^*) = \psi(x^*)$. Επομένως $\phi(x^{*m}) = \psi(x^{*m})$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και άρα $\phi(x^n x^{*m}) = \psi(x^n x^{*m})$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η $\mathcal{C}$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{x^n x^{*m} : n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$ και οι ϕ και ψ είναι συνεχείς. Έπεται λοιπόν ότι $\phi = \psi$. □

Θεώρημα 2 (Συναρτησιακός λογισμός)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $x \in \mathcal{A}$. Υπάρχει *-μορφισμός*

$$\Phi_c : C(\sigma(x)) \to \mathcal{A}$$

με $\Phi_c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\Phi_c(\mathrm{id}) = x$ αν και μόνον αν *$x^*x = xx^*$. Η επέκταση αυτή (αν υπάρχει) είναι μοναδική και ισομετρική, και το πεδίο τιμών της είναι ακριβώς η C^*-υπάλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, x)$ της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το x και την $\mathbf{1}$.*

Αν $f \in C(\sigma(x))$, γράφουμε συνήθως $f(x)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Απόδειξη (α) Η συνθήκη $x^*x = xx^*$ είναι αναγκαία για την ύπαρξη του Φ_c. Πράγματι, αν $f_o : \sigma(x) \to \mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση $f_o(z) = \mathrm{id}(z) = z$, τότε $\Phi_c(f_o) = x$ από την υπόθεση. Επομένως $x^* = (\Phi_c(f_o))^* = \Phi_c(f_o^*)$ αφού η Φ_c είναι *-μορφισμός. Αλλά οι συναρτήσεις f_o και f_o^* μετατίθενται, συνεπώς και οι εικόνες τους x και x^* πρέπει να μετατίθενται.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι η συνθήκη $x^*x = xx^*$ ικανοποιείται. Από το Λήμμα, η απεικόνιση $\hat{x} : \Omega(\mathcal{C}) \to \sigma(x)$ είναι ομοιομορφισμός. Είναι εύκολο να ελέγξεις [1] ότι η απεικόνιση

$$\Psi : C(\sigma(x)) \to C(\Omega(\mathcal{C})) : f \to f \circ \hat{x}$$

[1] Άσκηση!

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Αλλά από το Θεώρημα Gelfand - Naimark η απεικόνιση

$$\mathcal{G}^{-1} : C(\Omega(\mathcal{C})) \to \mathcal{C} : \hat{y} \to y$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός. Αν ονομάσω Φ_c την σύνθεση

$$\Phi_c = \mathcal{G}^{-1} \circ \Psi : C(S) \xrightarrow{\Psi} C(\mathfrak{M}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$$

τότε η Φ_c είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $C(\sigma(x))$ επί της $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$.

Μένει να ελέγξουμε ότι $\Phi_c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και ότι $\Phi_c(f_o) = x$. Η πρώτη σχέση αληθεύει γιατί $\Psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Η δεύτερη επίσης αληθεύει γιατί $\Psi(f_o) = \hat{x}$ και $\mathcal{G}^{-1}(\hat{x}) = x$.

(γ) *(Μοναδικότητα)* Έστω $\Phi : C(\sigma(x)) \to \mathcal{A}$ *-μορφισμός με $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\Phi(f_o) = x$. Επειδή οι $C(\sigma(x))$ και $\mathcal{A}$ είναι C^* άλγεβρες με μονάδα, και ο Φ είναι *-μορφισμός, έπεται (όπως έχουμε δείξει) ότι ο Φ είναι συνεχής. Έχουμε όμως, για κάθε $n, m = 0, 1, \ldots$,

$$\Phi(f_o^n f_o^{*m}) = \Phi(f_o)^n \Phi(f_o)^{*m} = x^n x^{*m} = \Phi_c(f_o)^n \Phi_c(f_o)^{*m} = \Phi_c(f_o^n f_o^{*m}) \,.$$

Επομένως οι Φ και Φ_c ταυτίζονται στην γραμμική θήκη του συνόλου $\{f_o^n f_o^{*m} : n, m = 0, 1, \ldots\}$. Αλλά η γραμμική αυτή θήκη είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $C(\sigma(x))$ που περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και χωρίζει τα σημεία του $\sigma(x)$. Επομένως, από το Θεώρημα Stone - Weierstrass, είναι πυκνή στην $C(\sigma(x))$. Αφού οι Φ και Φ_c είναι συνεχείς, έπεται ότι θα ταυτίζονται και στην $C(\sigma(x))$. $\square$

Είναι άμεσο πόρισμα του συναρτησιακού λογισμού ότι το Λήμμα φασματικής απεικόνισης επεκτείνεται από τα πολυώνυμα σε όλην την $C((x))$:

Θεώρημα 3 (φασματικής απεικόνισης)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^*-άλγεβρα με μονάδα. Αν $x \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό και $f \in C(\sigma(x))$ τότε*

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) = \{f(z) : z \in \sigma(x)\}.$$

Απόδειξη Αν $\mathcal{C} = C^*(\mathbf{1}, x)$ είναι η μικρότερη C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει το x και την $\mathbf{1}$, η απεικόνιση

$$\Phi_c : C(\sigma(x)) \longrightarrow \mathcal{C} : f \longrightarrow f(x)$$

είναι ισομορφισμός αλγεβρών. Επομένως, $\lambda\mathbf{1} - f(x) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C})$ αν και μόνον αν $\lambda\mathbf{1} - f \in \mathrm{Inv}(C(\sigma(x))$. Το τελευταίο όμως συμβαίνει αν και μόνον αν $\lambda \notin f(\sigma(x))$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{C}}(f(x)) = f(\sigma(x)))$. Ξέρουμε όμως τώρα ότι $\sigma_{\mathcal{C}}(f(x)) = \sigma_{\mathcal{A}}(f(x))$. $\square$