Το φάσμα στοιχείου άλγεβρας Banach

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα $x \in \mathcal{A}$ λέγεται *αντιστρέψιμο (invertible)* αν υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{A}$ ώστε $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$. Γράφουμε $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

Πρόταση 1. *Αν $a \in \mathcal{A}$ και $\|a\| < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ συγκλίνει στην $\mathcal{A}$ και ισούται με $(\mathbf{1}-a)^{-1}$. Συνεπώς $\mathbf{1}-a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Εφόσον $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$ και $\|a\| < 1$, είναι σαφές ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει (πληρότητα της $\mathcal{A}$).
Έστω y το άθροισμά της. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{1} - a^{n+1} = (\mathbf{1}-a)(\mathbf{1}+a+a^2+a^3+\ldots+a^n) = (\mathbf{1}+a+a^2+a^3+\ldots+a^n)(\mathbf{1}-a)\,.$$

Καθώς $n \to \infty$, έχουμε $a^{n+1} \to 0$ επομένως

$$\mathbf{1} = (\mathbf{1}-a)y = y(\mathbf{1}-a)$$

πράγμα που δείχνει ότι το y είναι το αντίστροφο του $\mathbf{1}-a$. □

Πρόταση 2. *Η μονάδα $\mathbf{1}$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αν $\|\mathbf{1}-b\| < 1$, από τη Πρόταση 1 το $b = \mathbf{1}-(\mathbf{1}-b)$ είναι αντιστρέψιμο. Συνεπώς $B(\mathbf{1},1) \subseteq \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. □

Πρόταση 3. *Το σύνολο $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ είναι ανοικτό στην $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Η απεικόνιση

$$f_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : y \to xy$$

στέλνει το $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ στο $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Αφού $B(\mathbf{1},1) \subseteq \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, έπεται ότι η εικόνα του $f_x(B(\mathbf{1},1))$ που είναι η $B(x,\|x\|)$ θα περιέχεται στο $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. □

Πρόταση 4. *Η απεικόνιση $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) : x \to x^{-1}$ είναι συνεχής (άρα ομοιομορφισμός).*

Απόδειξη. Αν $a, b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left\|a^{-1}-b^{-1}\right\| &= \left\|b^{-1}(b-a)a^{-1}\right\| \\ &= \left\|(b^{-1}-a^{-1})(b-a)a^{-1} + a^{-1}(b-a)a^{-1}\right\| \\ &\leqslant \left\|b^{-1}-a^{-1}\right\| \|b-a\| \left\|a^{-1}\right\| + \left\|a^{-1}\right\|^2 \|b-a\| \\ \text{άρα} \quad \left\|a^{-1}-b^{-1}\right\| (1 - \|b-a\| \left\|a^{-1}\right\|) &\leqslant \left\|a^{-1}\right\|^2 \|b-a\|\,. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{b \to a} \left\|b^{-1}-a^{-1}\right\| = 0. \qquad \square$$

Ορισμός 1. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Το* **φάσμα (spectrum)** *$\sigma(x)$ του x είναι το σύνολο*

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbf{1} - x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(x)$, το $r_\lambda(x) := (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} \in \mathcal{A}$ λέγεται **επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση (resolvent)** *του x.*

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Τότε:

Πρόταση 5. *Το σύνολο $\sigma(x)$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Το $\mathbb{C} \backslash \sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbf{1} - x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}$ είναι η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ από τη συνεχή συνάρτηση $\mathbb{C} \to \mathcal{A} : \lambda \mapsto \lambda \mathbf{1} - x$. □

Πρόταση 6. *Το σύνολο $\sigma(x)$ είναι φραγμένο: $\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$.*

Απόδειξη. Αν $|\lambda| > \|x\|$ το $\lambda \mathbf{1} - x = \lambda(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda})$ είναι αντιστρέψιμο από την Πρόταση 1, αφού $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$. □

Θεώρημα 7. *Το σύνολο $\sigma(x)$ είναι μη κενό.*

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να δείξουμε ότι, αν $\sigma(x) = \emptyset$, η (παντού ορισμένη) συνάρτηση

$$\mathbb{C} \to \mathcal{A} : \lambda \mapsto (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} := r_\lambda(x)$$

είναι «ολόμορφη» και φραγμένη, οπότε θα είναι σταθερή από το Θεώρημα Liouville της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Ισχυρισμός 1 (The resolvent formula) Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \backslash \sigma(x)$ και $\lambda \neq \mu$ τότε

$$\frac{r_\lambda(x) - r_\mu(x)}{\lambda - \mu} = -r_\lambda(x) r_\mu(x)\,.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού

$$\begin{aligned} r_\lambda(x) - r_\mu(x) &= (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} - (\mu \mathbf{1} - x)^{-1} \\ &= (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}(\mu \mathbf{1} - x - (\lambda \mathbf{1} - x))(\mu \mathbf{1} - x)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)(\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}(\mu \mathbf{1} - x)^{-1}\,. \end{aligned}$$

Ισχυρισμός 2 Η συνάρτηση $\lambda \mapsto (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}$ με τιμές στην $\mathcal{A}$ είναι (norm-) παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{C} \backslash \sigma(x)$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού Σταθεροποιούμε ένα $\mu \in \mathbb{C} \backslash \sigma(x)$. Αφού το $\sigma(x)$ είναι κλειστό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda - \mu| < \delta$. Από την Πρόταση 4, η απεικόνιση

$$\mathbb{C} \backslash \sigma(x) \to \mathcal{A} : \lambda \mapsto (\lambda \mathbf{1} - x) \mapsto (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} = r_\lambda(x)$$

είναι συνεχής. Συνεπώς το όριο $\lim\limits_{\lambda \to \mu} r_\lambda(x)$ υπάρχει στην $\mathcal{A}$ και ισούται με $r_\mu(x)$. Αυτό αποδεικνύει ότι το

$$\lim_{\lambda \to \mu} \frac{r_\lambda(x) - r_\mu(x)}{\lambda - \mu} \text{ υπάρχει και } = -r_\mu(x)^2\,.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος Ας υποθέσουμε ότι $\sigma(x) = \emptyset$. Αν $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής γραμμική μορφή, θεωρούμε την συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \lambda \mapsto \phi(r_\lambda(x)) = \phi((\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}))\,.$$

Από τον Ισχυρισμό 2, το επόμενο όριο υπάρχει σε κάθε $\mu \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{\lambda\to\mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} = \lim_{\lambda\to\mu} \frac{\phi(r_\lambda(x)) - \phi(r_\mu(x))}{\lambda - \mu} = -\phi(r_\mu(x)^2)\,.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι ακέραια.

Από το Θεώρημα Liouville έπεται ότι η f είναι φραγμένη.

Επιπλέον όμως,

Ισχυρισμός 3 Το όριο $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda)$ υπάρχει και είναι 0.

Απόδειξη του Ισχυρισμού Έχουμε δείξει ότι όταν $|\lambda| > \|x\|$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|r_\lambda(x)\| = \left\| \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\| &= \frac{1}{|\lambda|}\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda|}\left(\mathbf{1} - \frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}
\end{aligned}$$

το οποίο τείνει στο 0 καθώς $|\lambda| \to \infty$. Αφού η ϕ είναι συνεχής, ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Συμπέρασμα: $f(\lambda) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Δηλαδή $\phi(r_\lambda(x)) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και κάθε ϕ στον δυικό της $\mathcal{A}$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach έχουμε $(\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, πράγμα αδύνατο. $\square$

Ακολουθεί μια δεύτερη απόδειξη.

Θεώρημα 8. *Σε κάθε άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ (με μονάδα), το φάσμα $\sigma(x)$ κάθε $x \in \mathcal{A}$ είναι* μη κενό και συμπαγές *υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και η επιλύουσα συνάρτηση*

$$\mathbb{C}\backslash\sigma(x) \to \mathcal{A} : \lambda \to r_\lambda(x) := (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$$

είναι ολόμορφη *(:έχει τοπικά δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$).*

Απόδειξη. (i) Έστω πρώτα $|\lambda| > \|x\|$. Τότε $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$ άρα $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\|(\frac{x}{\lambda})^n\right\| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n < \infty$ (γεωμετρική σειρά). Συνεπώς η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{\lambda})^n$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει στην $\mathcal{A}$ (πληρότητα της $\mathcal{A}$). Έχουμε

$$r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

διότι

$$
\begin{aligned}
(\lambda\mathbf{1}-x)\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}(\lambda\mathbf{1}-x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{\lambda^n}-\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\\
&= \mathbf{1}-\frac{x^{N+1}}{\lambda^{N+1}}\to\mathbf{1}\ \text{ καθώς } N\to\infty\,.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς κάθε $\lambda\in\mathbb{C}$ με $|\lambda|>\|x\|$ ανήκει στο $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$.

• *Δηλαδή το $\sigma(x)$ είναι φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{C}$ και μάλιστα $\sigma(x)\subseteq B(0,\|x\|)$.*

(ii) Έστω τώρα $\lambda_0\in\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε $B(\lambda_0,\delta)\subseteq\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, οπότε το $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ είναι ανοικτό, και ότι η $\lambda\to r_\lambda(x)$ έχει δυναμοσειρά που συγκλίνει για κάθε λ_0 στην $B(\lambda_0,\delta)$.

Πράγματι: αφού $\lambda_0\in\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, το $r_{\lambda_0}(x)=(\lambda_0\mathbf{1}-x)^{-1}\in\mathcal{A}$ ορίζεται. Το συμβολίζουμε με $r_0\in\mathcal{A}$ για συντομία, και θέτουμε $\delta=\frac{1}{\|r_0\|}$.

Έστω $\lambda\in B(\lambda_0,\delta)$, δηλαδή $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|r_0\|}$. Θέτοντας $\mu=\lambda_0-\lambda$, παρατηρούμε ότι $\|\mu r_0\|<1$ άρα η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\mu r_0)^n$ συγκλίνει στην $\mathcal{A}$ (όπως πριν) και έχουμε

$$r_0\sum_{n=0}^{\infty}(\mu r_0)^n=r_0(\mathbf{1}-\mu r_0)^{-1}=(r_0^{-1}-\mu\mathbf{1})^{-1}=((\lambda_0\mathbf{1}-x)-(\lambda_0-\lambda)\mathbf{1})^{-1}=(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}$$

άρα το $r_\lambda(x)$ ορίζεται, δηλαδή $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ και (αντικαθιστώντας $\mu=\lambda_0-\lambda$ και $r_0=(\lambda_0\mathbf{1}-x)^{-1}$)

$$r_\lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n(\lambda_0\mathbf{1}-x)^{-(n+1)}\qquad\textbf{(*)}$$

που είναι η δυναμοσειρά της $\lambda\to r_\lambda(x)$ με κέντρο λ_0. Δείξαμε λοιπόν ότι $B(\lambda_0,\delta)\subseteq\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, οπότε

• *το $\sigma(x)$ είναι κλειστό στο $\mathbb{C}$* και

• *η $\lambda\to r_\lambda(x)$ έχει δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0\in\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$.*

(iii) Υποθέτουμε τώρα, προς άτοπο, ότι το $\sigma(x)$ είναι κενό. Από το (ii), ξέρουμε ότι η συνάρτηση $\mathbb{C}\to\mathcal{A}:\lambda\to r_\lambda(x)$ ορίζεται παντού και έχει (τοπικά) δυναμοσειρά γύρω από κάθε σημείο $\lambda_0\in\mathbb{C}$.

Σταθεροποιούμε μια συνεχή γραμμική μορφή $\phi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}:\lambda\to\phi(r_\lambda(x)).$$

Για κάθε $\lambda_0\in\mathbb{C}$, εφαρμόζοντας την ϕ στην σχέση (*) έχουμε, από τη γραμμικότητα και τη συνέχεια της ϕ,

$$f(\lambda)=\phi(r_\lambda(x))=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n\phi((\lambda_0\mathbf{1}-x)^{-(n+1)})=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\lambda_0-\lambda)^n$$

όπου $c_n=\phi((\lambda_0\mathbf{1}-x)^{-(n+1)})\in\mathbb{C}$ και η σειρά συγκλίνει για κάθε $\lambda\in B(\lambda_0,\frac{1}{\|r\|})$, όπως είδαμε στο (ii).

Δηλαδή η η f έχει δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0\in\mathbb{C}$, συνεπώς είναι ακέραια (έχει μιγαδική παράγωγο σε κάθε λ_0).

Ειδικότερα όταν $|\lambda|>\|x\|$ ξέρουμε από το (i) ότι

$$r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \qquad \text{άρα} \;\; f(\lambda) = \phi(r_\lambda(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n)\frac{1}{\lambda^{n+1}}\,.$$

Κατά συνέπεια, ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή πάνω σε έναν κύκλο $\gamma(t) = \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ ακτίνας $\rho > \|x\|$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο, [1] έχουμε

$$\int_\gamma f(\lambda)d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n)\int_\gamma \frac{1}{\lambda^{n+1}}d\lambda = 2\pi i\,\phi(x^0) = 2\pi i\,\phi(\mathbf{1})$$

Όμως, αφού η f είναι ακέραια, το ολοκλήρωμά της στον κλειστό κύκλο μηδενίζεται (τοπικό Θεώρημα Cauchy). Κατά συνέπεια, έχουμε $\phi(\mathbf{1}) = 0$. Αλλά η συνεχής γραμμική μορφή ϕ ήταν αυθαίρετη, και από το Θεώρημα Hahn Banach μπορούμε να βρούμε ϕ ώστε $\phi(\mathbf{1}) \neq 0$.

Η αντίφαση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το $\sigma(x)$ δεν μπορεί να είναι κενό.

Σημείωση Στο τελευταίο βήμα μπορεί κανείς να ολοκληρώσει την απόδειξη και ως εξής:

Όταν $|\lambda| > \|x\|$ έχουμε $|f(\lambda)| \leqslant \|\phi\| (|\lambda| - \|x\|)^{-1}$ όπως είδαμε, άρα $\lim_{|\lambda|\to\infty} |f(\lambda)| = 0$. Αφού η f είναι ακέραια και μηδενίζεται το άπειρο, από το Θεώρημα Liouville (!) έπεται ότι αναγκαστικά $f = 0$. Θέτοντας $\lambda = 0$ βρίσκουμε $0 = f(0) = \phi(x^{-1})$, που οδηγεί πάλι σε άτοπο από το Θεώρημα Hahn Banach. $\square$

Ασκήσεις Μιά άλγεβρα λέγεται διαιρετική αν έχει μονάδα και κάθε με μηδενικό στοιχείο της είναι αντιστρέψιμο.

Π.χ. Το σύνολο $\mathcal{R}$ όλων των ρητών συναρτήσεων $f = \frac{p}{q}$ όπου p, q πολυώνυμα μιας μεταβλητής με $q \neq 0$.

Αποδείξτε το Θεώρημα Gelfand Mazur: Κάθε μιγαδική διαιρετικά άλγεβρα Banach είναι αλγεβρικά και τοπολογικά ισομορφική με το $\mathbb{C}$.

Αποδείξτε ότι η αλγεβρα $\mathcal{R}$ των ρητών συναρτήσεων δεν δέχεται νόρμα ως προς την οποία να είναι άλγεβρα Banach.

[1] όταν $|\lambda| = \rho$, τα μερικά αθροίσματα

$$\sum_{n=0}^{N}\left|\phi(x^n)\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right| = \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{N}\left|\phi((\frac{x}{\lambda})^n)\right| \leqslant \frac{\|\phi\|}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{N}\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n = \frac{\|\phi\|}{|\lambda|}\left(1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^{-1} = \frac{\|\phi\|}{\rho}\left(1 - \frac{\|x\|}{\rho}\right)^{-1}$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένα (ως προς λ και N), άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στον κύκλο