Ο τύπος Gelfand-Beurling

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Η *φασματική ακτίνα (spectral radius)* $\rho(a)$ είναι η ακτίνα του μικρότερου δίσκου στο $\mathbb{C}$ που περιέχει το $\sigma(a)$. Δηλαδή

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}\,.$$

Έχουμε δείξει ότι $\sigma(a) \subseteq B(0, \|a\|)$, άρα $\rho(a) \leqslant \|a\|$, αλλά η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα 1. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Τότε*

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}\,.$$

Πόρισμα 2. *Αν $\mathcal{A}$ είναι C*-άλγεβρα (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε*

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\|\,.$$

Ειδικότερα αυτό ισχύει όταν το a είναι αυτοσυζυγές (δηλ. $a^* = a$).

Απόδειξη του Θεωρήματος. Θα δείξουμε ότι

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leqslant \rho(a) \leqslant \liminf \|a^n\|^{1/n}$$

οπότε θα έχουμε δείξει ταυτοχρόνως την ύπαρξη του ορίου και τη ζητούμενη ισότητα.

(i) Αν $\lambda \in \sigma(a)$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε[1] $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ άρα $|\lambda|^n \leqslant \|a^n\|$, όπως έχουμε δείξει. Επομένως $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Παίρνοντας maximum ως προς $\lambda \in \sigma(a)$, έχουμε $\rho(a) \leqslant \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\rho(a) \leqslant \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ και συνεπώς

$$\rho(a) \leqslant \liminf \|a^n\|^{1/n}\,.$$

(ii) Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leqslant \rho(a)$$

Αρκεί γι αυτό να δείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός 1. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| < \frac{1}{\rho(a)}$, η ακολουθία $\{(\lambda a)^n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένη στην $\mathcal{A}$, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $K(\lambda)$ τέτοια ώστε για κάθε n να ισχύει $\|\lambda^n a^n\| \leqslant K(\lambda)$.*

Γιατί τότε θα έχουμε

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{(K(\lambda))^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|} \quad \text{για κάθε } n, \text{ όταν } |\lambda| < \frac{1}{\rho(a)}\,.$$

Αφού $K(\lambda)^{\frac{1}{n}} \to 1$ όταν $n \to \infty$, έπεται τότε ότι $\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}$ για κάθε λ με $\rho(a) < \frac{1}{|\lambda|}$, οπότε

$$\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho(a)$$

και η απόδειξη θα είναι πλήρης.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Σταθεροποιούμε ένα λ με $|\lambda| < \frac{1}{\rho(a)}$. Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος (Banach – Steinhaus), [2] αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι *ασθενώς φραγμένη* δηλαδή ότι για κάθε

[1] Επειδή $a^n - \lambda^n\mathbf{1} = (a - \lambda\mathbf{1})(a^{n-1} + a^{n-2}\lambda + \ldots + \lambda^{n-1}\mathbf{1}) = (a^{n-1} + a^{n-2}\lambda + \ldots + \lambda^{n-1}\mathbf{1})(a - \lambda\mathbf{1})$, το $a^n - \lambda^n\mathbf{1}$ αντιστρέφεται αν και μόνον αν το $a - \lambda\mathbf{1}$ αντιστρέφεται.

[2] δες την Πρόταση 3 στο τέλος

συνεχή γραμμική μορφή $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ η ακολουθία $\{\phi((\lambda a)^n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$, δηλ. υπάρχει μια σταθερά $K_\phi(\lambda)$ τέτοια ώστε για κάθε n να ισχύει $|\phi(\lambda^n a^n)| \leqslant K_\phi(\lambda)$.

Έστω λοιπόν $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ γραμμική και συνεχής. Όπως έχουμε δείξει, η συνάρτηση $h(\mu) = \mu\phi[(\mu\mathbf{1} - a)^{-1}]$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$, άρα και στο $\{\mu : |\mu| > \rho(a)\}$. Επομένως η συνάρτηση

$$g(z) = h\left(\frac{1}{z}\right) = \phi((\mathbf{1} - za)^{-1})$$

ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{\rho(a)}\}$.[3] Επειδή το όριο $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = g(0) = \phi(\mathbf{1})$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$, (το 0 είναι επουσιώδης ανωμαλία για την g, άρα) η g ορίζεται και είναι ολόμορφη στον δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho(a)}\}$, επομένως αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < \frac{1}{\rho(a)}\,.$$

Ισχυρίζομαι ότι $c_n = \phi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, για $|z| < \frac{1}{\|a\|}$ ($\leqslant \frac{1}{\rho(a)}$) ξέρουμε (εφόσον $\|za\| < 1$) ότι

$$(\mathbf{1} - za)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n\,.$$

άρα, αφού η ϕ είναι γραμμική και συνεχής,

$$g(z) = \phi\left((\mathbf{1} - za)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \phi(a^n), \quad |z| < \frac{1}{\|a\|}.$$

Από την μοναδικότητα της δυναμοσειράς για την g έπεται τώρα ότι $c_n = \phi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \phi(a^n)$ συγκλίνει (όχι μόνον όταν $|z| < \frac{1}{\|a\|}$ αλλά και) όταν $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$, άρα και για $z = \lambda$. Κατά συνέπεια έχουμε ειδικότερα $\lim_{n\to\infty} \lambda^n \phi(a^n) = 0$. Επομένως η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη, όπως θέλαμε.

Έτσι αποδείχθηκε ο Ισχυρισμός 1, οπότε η Απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Παρατήρηση Στο πρώτο βήμα της απόδειξης δείξαμε ότι $\rho(a) \leqslant \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Επομένως στην πραγματικότητα έχουμε ότι

$$\rho(a) = \lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

[3] Εδώ θέτουμε $\frac{1}{\rho(a)} = +\infty$ όταν $\rho(a) = 0$.

Απόδειξη του Πορίσματος. Υποθέτουμε τώρα ότι η $\mathcal{A}$ είναι C* άλγεβρα και ότι το $a \in \mathcal{A}$ είναι φυσιολογικό. Έχουμε τότε

$$\|a\|^4 \overset{(C^*)}{=} \|a^*a\|^2 \overset{(C^*)}{=} \|(a^*a)^*(a^*a)\| \overset{(N)}{=} \left\|(a^*)^2a^2\right\| = \left\|(a^2)^*(a^2)\right\| \overset{(C^*)}{=} \left\|a^2\right\|^2$$

(η υπόθεση $a^*a = aa^*$ χρησιμοποιήθηκε στη σχέση (N)), συνεπώς $\|a\|^2 = \|a^2\|$. Με επαγωγή βρίσκουμε ότι $\|a\|^{2^m} = \left\|a^{2^m}\right\|$, άρα $\|a\| = \left\|a^{2^m}\right\|^{1/2^m}$ για κάθε m, και συνεπώς

$$\rho(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_m \left\|a^{2^m}\right\|^{1/2^m} = \|a\| .$$

□

Πρόταση 3 (Πόρισμα του Banach–Steinhaus)**.** *Αν $\mathcal{A}$ είναι χώρος με νόρμα, κάθε ασθενώς φραγμένο υποσύνολο $S \subseteq \mathcal{A}$ είναι (νορμ-) φραγμένο. Δηλαδή αν για κάθε $\phi \in \mathcal{A}^*$ υπάρχει σταθερά M_ϕ ώστε $|\phi(s)| \leqslant M_\phi$ για κάθε $s \in S$, τότε το S είναι ομοιόμορφα φραγμένο, δηλαδή υπάρχει σταθερά M ώστε $\|s\| \leqslant M$ για κάθε $s \in S$.*

Απόδειξη Για κάθε $s \in S$, θεωρούμε την γραμμική και συνεχή απεικόνιση $\hat{s} : \mathcal{A}^* \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(s)$. Η οικογένεια $\{\hat{s} : s \in S\}$ είναι κατά σημείο φραγμένη: για κάθε $\phi \in \mathcal{A}^*$ έχουμε $|\hat{s}(\phi)| = |\phi(s)| \leqslant M_\phi$ για κάθε $s \in S$. Αφού ο χώρος $\mathcal{A}^*$ είναι χώρος Banach, από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος έπεται ότι η οικογένεια αυτή είναι ομοιόμορφα φραγμένη: υπάρχει σταθερά M ώστε $\|\hat{s}\| \leqslant M$ για κάθε $s \in S$. Όμως $\|\hat{s}\| = \|s\|$. Πράγματι,

$$\|s\| = \sup\{|\phi(s)| : \|\phi\| \leqslant 1\} = \sup\{|\hat{s}(\phi)| : \|\phi\| \leqslant 1\} = \|\hat{s}\| .$$

Συνεπώς για κάθε $s \in S$ έχουμε $\|s\| \leqslant M$. □