Μεταθετικές Άλγεβρες

Ορισμός 1. ***Μορφισμός*** *$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (όπου $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ άλγεβρες) είναι μια γραμμική και πολλαπλασιαστική απεικόνιση.*

Χαρακτήρας *ή* ***πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή*** *ϕ σε μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται ένας* **μη μηδενικός** *μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε $\Omega(\mathcal{A})$ ή $\sigma(\mathcal{A})$.*

Πρόταση 1. *Κάθε χαρακτήρας μιας άλγεβρας Banach (μεταθετικής ή όχι) είναι συνεχής, με νόρμα το πολύ 1. Αν μάλιστα η άλγεβρα έχει μονάδα, τότε κάθε χαρακτήρας έχει νόρμα ακριβώς 1.*

Απόδειξη. Έστω $\phi \in \Omega(\mathcal{A})$. Θα δείξω ότι $|\phi(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$ με $\|x\| \leqslant 1$. Έστω ότι υπάρχει $x_o \in \mathcal{A}$ με $\|x_o\| \leqslant 1$ και $\phi(x_o) = \lambda$ όπου $|\lambda| > 1$. Θέτω $x = x_o/\lambda$. Επειδή $\|x\| < 1$, η σειρά

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

συγκλίνει. Αλλά $y = xy + x$ άρα $\phi(y) = \phi(x)\phi(y) + \phi(x) = \phi(y) + 1$, άτοπο.

Επομένως

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \leqslant 1.$$

Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα, τότε $\|\phi\| = 1$ επειδή $\phi(\mathbf{1}) = 1$. □

Πρόταση 2. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach* ***με μονάδα****. Το σύνολο $\Omega(\mathcal{A})$ γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιασθεί με την ασθενή-* τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ θέτω

$$D_a := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \|a\|\} \quad \text{και} \quad D := \prod_{a \in \mathcal{A}} D_a.$$

Δηλαδή το D είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $|\theta(a)| \leqslant \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Κάθε D_a είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ επομένως, από το Θεώρημα Tychonoff, το D είναι συμπαγής χώρος ως προς την τοπολογία γινόμενο. Αν $\phi \in \Omega(\mathcal{A})$, τότε $\phi(a) \in D_a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αφού $\|\phi\| \leqslant 1$), άρα $\phi \in D$. Δηλαδή το $\Omega(\mathcal{A})$ είναι υποσύνολο του D, και η σχετική τοπολογία είναι η ασθενής-*. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι το $\Omega(\mathcal{A})$ είναι κλειστό υποσύνολο του D.

Έστω $\phi_i \in \Omega(\mathcal{A})$ και $\theta \in D$ ώστε $\phi_i(x) \to \theta(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Θα δείξω ότι $\theta \in \Omega(\mathcal{A})$. Πράγματι, για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ έχουμε

(α) $\theta(\mathbf{1}) = \lim \phi_i(\mathbf{1}) = 1$, αφού $\phi_i(\mathbf{1}) = 1$ για κάθε i.

(β) $\theta(ab) = \lim \phi_i(ab) = \lim(\phi_i(a) \cdot \phi_i(b)) = \lim \phi_i(a) \cdot \lim \phi_i(b) = \theta(a) \cdot \theta(b)$ αφού $\phi_i(ab) = \phi_i(a) \cdot \phi_i(b)$ για κάθε i.

(γ) $\theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b)$ αφού $\phi_i(a + b) = \phi_i(a) + \phi_i(b)$ για κάθε i. □

Παρατήρηση Η ύπαρξη μονάδας στην $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παραδείγματος χάριν, ο χώρος των χαρακτήρων της $c_o(\mathbb{N})$ δεν είναι συμπαγής (άσκηση). Από την άλλη μεριά, το σύνολο των χαρακτήρων μιας άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης είναι πεπερασμένο (γιατί;) και συνεπώς συμπαγές, είτε η άλγεβρα έχει μονάδα είτε όχι.

Ιδεώδη Αν $\mathcal{A}$ άλγεβρα και $\mathcal{J}$ ιδεώδες της $\mathcal{A}$, το πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ γίνεται άλγεβρα με τις πράξεις

$$
\begin{aligned}
(x+\mathcal{J})+(y+\mathcal{J}) &= (x+y)+\mathcal{J} \\
\lambda(x+\mathcal{J}) &= (\lambda x)+\mathcal{J} \\
(x+\mathcal{J}).(y+\mathcal{J}) &= (x.y)+\mathcal{J}
\end{aligned}
$$

και η κανονική απεικόνιση πηλίκο

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J} : x \to x+\mathcal{J}$$

είναι μορφισμός με πυρήνα $\ker \pi = \mathcal{J}$.

Παρατηρήσεις (i) Ένα ιδεώδες μιάς άλγεβρας με μονάδα είναι γνήσιο αν και μόνον αν δεν περιέχει την μονάδα, ισοδύναμα αν δεν περιέχει κανένα αντιστρέψιμο στοιχείο.

(ii) Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα **με μονάδα** και υπάρχει $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ μορφισμός $\neq 0$, ο πυρήνας $\ker \phi$ είναι **μεγιστικό (αμφίπλευρο) ιδεώδες**.

Πράγματι, το $\ker \phi$ είναι γραμμικός χώρος (αφού η ϕ είναι γραμμική) και είναι ιδεώδες, γιατί αν $b \in \ker \phi$ τότε για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = 0$ και $\phi(ba) = \phi(b)\phi(a) = 0$, άρα τα ab και ba ανήκουν στο $\ker \phi$.

Επίσης, το $\ker \phi$ είναι μεγιστικό, γιατί κάθε ιδεώδες (μάλιστα κάθε υπόχωρος) που περιέχει γνήσια το $\ker \phi$ είναι ίσο με την $\mathcal{A}$. Πράγματι, αν $a \in \mathcal{A}$ και $a \notin \ker \phi$, τότε για κάθε $b \in \mathcal{A}$ έχουμε $b - \frac{\phi(b)}{\phi(a)}a \in \ker \phi$ και συνεπώς $b = \frac{\phi(b)}{\phi(a)}a + \left(b - \frac{\phi(b)}{\phi(a)}a\right) \in \mathbb{C}a + \ker \phi$, επομένως ο υπόχωρος που παράγεται απ' το $\ker \phi$ και το a είναι όλη η $\mathcal{A}$.

Στόχος: Να δείξουμε ότι, όταν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, κάθε μεγιστικό ιδεώδες είναι πυρήνας κάποιου χαρακτήρα.

Πρόταση 3. *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach **με μονάδα** και $\mathcal{J}$ ένα (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο)* γνήσιο *ιδεώδες της $\mathcal{A}$, τότε η κλειστή θήκη $\overline{\mathcal{J}}$ του $\mathcal{J}$ είναι* γνήσιο *(ομοειδές) ιδεώδες.*

Άρα, κάθε μεγιστικό (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο) ιδεώδες μίας άλγεβρας Banach με μονάδα είναι κλειστό.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι το $\overline{\mathcal{J}}$ είναι ιδεώδες έπεται από την συνέχεια των αλγεβρικών πράξεων. Πρέπει να αποδειχθεί ότι είναι *γνήσιο*, δηλαδή ότι $\mathbf{1} \notin \overline{\mathcal{J}}$. Αυτό πράγματι αληθεύει, γιατί η ανοικτή μπάλα με κέντρο $\mathbf{1}$ και ακτίνα 1 αποτελείται από αντιστρέψιμα στοιχεία (όπως έχουμε δείξει), επομένως δεν τέμνει το $\mathcal{J}$. □

Παρατήρηση Και στην πρόταση αυτή η ύπαρξη μονάδας δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παραδείγματος χάριν, το ιδεώδες c_{00} της c_0 είναι γνήσιο, αλλά η κλειστή του θήκη δεν είναι.

Πρόταση 4. *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathcal{J}$ ένα αμφίπλευρο* κλειστό *ιδεώδες της $\mathcal{A}$, τότε ο χώρος πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ εφοδιασμένος με την νόρμα πηλίκο*

$$\|a+\mathcal{J}\|_q := \inf\{\|a+x\| : x \in \mathcal{J}\} = d(a,\mathcal{J})$$

είναι άλγεβρα Banach με μονάδα, και η κανονική απεικόνιση πηλίκο $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ είναι συνεχής (επι-) μορφισμός.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η $\|.\|_q$ είναι πλήρης νόρμα στον χώρο πηλίκο $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ και ότι η απεικόνιση πηλίκο είναι συνεχής αποδεικνύεται στην γενική θεωρία των χώρων Banach. Μένει να αποδειχθεί ότι

$$\|ab + \mathcal{J}\|_q \leqslant \|a + \mathcal{J}\|_q . \|b + \mathcal{J}\|_q .$$

Πράγματι, αν $x, y \in \mathcal{J}$ έχουμε

$$\|(a + x)(b + y)\| \leqslant \|a + x\|.\|b + y\|.$$

Αλλά $(a + x)(b + y) = ab + (ay + xb + xy)$ και $ay + xb + xy \in \mathcal{J}$, άρα $\|(a + x)(b + y)\| \geqslant \|ab + \mathcal{J}\|_q$. Επομένως η προηγούμενη ανισότητα δίνει

$$\|ab + \mathcal{J}\|_q \leqslant \|a + x\|.\|b + y\|$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{J}$, και το συμπέρασμα έπεται παίρνοντας infimum ως προς x και y. □

Θεώρημα 5. *Έστω $\mathcal{A}$ μία μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα. Η απεικόνιση*

$$\phi \to \ker \phi$$

είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ του συνόλου των χαρακτήρων και του συνόλου των μεγιστικών ιδεωδών της $\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Είδαμε νωρίτερα ότι για κάθε $\phi \in \Omega(\mathcal{A})$ ο πυρήνας $\ker \phi$ είναι μεγιστικό ιδεώδες.

Η απεικόνιση $\phi \mapsto \ker \phi$ είναι 1-1. Πράγματι: Έστω ότι $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$. Τότε για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $\phi_2(a - \phi_2(a)\mathbf{1}) = 0$ δηλαδή $a - \phi_2(a)\mathbf{1} \in \ker \phi_2$ οπότε $a - \phi_2(a)\mathbf{1} \in \ker \phi_1$, δηλαδή $\phi_1(a - \phi_2(a)\mathbf{1}) = 0$, επομένως $\phi_1(a) - \phi_2(a) = 0$ (αφού $\phi_1(\mathbf{1}) = 1$). Αφού το $a \in \mathcal{A}$ ήταν τυχόν, δείξαμε ότι $\phi_1 = \phi_2$.

Δείχνουμε τώρα ότι η απεικόνιση $\phi \mapsto \ker \phi$ είναι επί. Θεωρούμε ένα μεγιστικό ιδεώδες $\mathcal{M}$ της $\mathcal{A}$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει χαρακτήρας ϕ της $\mathcal{A}$ ωστε $\ker \phi = \mathcal{M}$.

Η $\mathcal{B} := \mathcal{A}/\mathcal{M}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα το σύμπλοκο $[\mathbf{1}] := \mathbf{1} + \mathcal{M}$.

Ισχυρισμός: Η $\mathcal{B}$ είναι διαιρετική, δηλαδή κάθε $[a] \in \mathcal{B}$ με $[a] \neq [0]$ έχει αντίστροφο στην $\mathcal{B}$.

Πράγματι: Θεωρώ το σύνολο

$$\mathcal{J} := \{ab + m : b \in \mathcal{A}, m \in \mathcal{M}\} .$$

Είναι φανερό ότι είναι γραμμικός υπόχωρος της $\mathcal{A}$. Ισχυρίζομαι ότι είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Πράγματι, για κάθε $c \in \mathcal{A}$ έχουμε $\mathcal{J}c \subseteq \mathcal{J}$, γιατί $(ab + m)c = a(cb) + (mc) \in \mathcal{J}$ αφού το $\mathcal{M}$ είναι ιδεώδες. Επίσης όμως $c\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$, γιατί $c(ab + m) = cab + (cm) = a(cb) + (cm) \in \mathcal{J}$ (εδώ χρειάσθηκε η μεταθετικότητα της $\mathcal{A}$).

Όμως, το $\mathcal{J}$ περιέχει το $\mathcal{M}$ (βάλε $b = 0$) και $\mathcal{J} \neq \mathcal{M}$ διότι $a \in \mathcal{J}$ (βάλε $b = \mathbf{1}$ και $m = 0$) ενώ $a \notin \mathcal{M}$ (αφού $[a] \neq [0]$).

Από την μεγιστικότητα του $\mathcal{M}$, έπεται λοιπόν ότι $\mathcal{J} = \mathcal{A}$, άρα $\mathbf{1} \in \mathcal{J}$. Συνεπώς υπάρχουν $b \in \mathcal{A}$ και $m \in \mathcal{M}$ ώστε $\mathbf{1} = ab + m$, άρα $ab = \mathbf{1} - m$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $[ab] = [\mathbf{1}]$, δηλαδή $[a][b] = [\mathbf{1}]$ και, επειδή η $\mathcal{B}$ είναι μεταθετική, $[b][a] = [\mathbf{1}]$. Δηλαδή το $[a]$ έχει αντίστροφο $[b]$ στην $\mathcal{B}$, και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Από το θεώρημα Gelfand – Mazur έπεται λοιπόν ότι η απεικόνιση

$$\theta : \mathbb{C} \to \mathcal{B} : \lambda \mapsto \lambda[\mathbf{1}]$$

είναι ισομορφισμός αλγεβρών. Επομένως η απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \xrightarrow{\theta^{-1}} \mathbb{C} : a \mapsto \theta^{-1}(\pi(a))$$

είναι μορφισμός αλγεβρών. Τέλος, αφού η θ^{-1} είναι 1-1, ο πυρήνας του ϕ είναι ίσος με τον πυρήνα του π, δηλαδή με το $\mathcal{M}$. $\square$

Πόρισμα 6. *Το σύνολο $\Omega(\mathcal{A})$ των χαρακτήρων κάθε μεταθετικής άλγεβρας Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα δεν είναι κενό.*

Απόδειξη Αν η $\mathcal{A}$ έχει μη μηδενικά μεγιστικά ιδεώδη, τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχει χαρακτήρες. Αν δεν έχει μεγιστικά ιδεώδη, τότε κάθε μη μηδενικό στοιχείο της είναι αντιστρέψιμο, οπότε ο ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ με το $\mathbb{C}$ που εξασφαλίζει το Θεώρημα Gelfand - Mazur είναι (ο μοναδικός) χαρακτήρας της $\mathcal{A}$ (και ο πυρήνας του, δηλ. το $\{0\}$, είναι μεγιστικό ιδεώδες). $\square$

Σε μη μεταθετικές άλγεβρες, το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα:

Παράδειγμα $\Omega(M_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ για $n \geqslant 2$.

Η επόμενη Πρόταση χαρακτηρίζει τα αντιστρέψιμα στοιχεία μιάς μεταθετικής άλγεβρας Banach με μονάδα, καθώς και το φάσμα κάθε στοιχείου της, μέσω των χαρακτήρων της:

Πρόταση 7. *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$.*

(α) Το x είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$ αν-ν $\phi(x) \neq 0$ για κάθε $\phi \in \Omega(\mathcal{A})$, ισοδύναμα αν το x δεν περιέχεται σε κανένα (μεγιστικό) ιδεώδες της $\mathcal{A}$.

(β) $\sigma(x) = \{\phi(x) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.

Απόδειξη (α) Το σύνολο $\mathcal{J} = \mathcal{A}x$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Αν $x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, τότε το $\mathcal{J}$ είναι γνήσιο ιδεώδες, άρα περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες, άρα (από το Θεώρημα 5) το x μηδενίζεται από κάποιον χαρακτήρα της $\mathcal{A}$. Αντίστροφα αν το x μηδενίζεται από κάποιον χαρακτήρα ϕ, τότε περιέχεται στο μεγιστικό ιδεώδες $\ker\phi$, άρα $x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

(β) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Εξ ορισμού $\lambda \in \sigma(x)$ αν και μόνον αν $\lambda\mathbf{1} - x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Από το (i) αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν υπάρχει $\phi \in \Omega(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(\lambda\mathbf{1} - x) = 0$, δηλαδή $\phi(x) = \lambda$. $\square$