Η άλγεβρα von Neumann μιας ομάδας

Έστω [1] G μια (αριθμήσιμη) ομάδα. *(Για παράδειγμα, το $\mathbb{Z}$ ή η $\mathbb{F}_2$.)* Θεωρούμε τον χώρο Hilbert

$$\ell^2(G) = \ell^2 G = \{f : G \to \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |f(t)|^2 < \infty\}.$$

Παρατήρηση 1. *Αν* $\delta_t(s) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s = t \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ *τότε η* $\{\delta_t : t \in G\}$ *είναι ορθοκανονική βάση του* $\ell^2 G$. *Για κάθε* $f \in \ell^2 G$ *έχουμε*

$$f(s) = \langle f, \delta_s \rangle \;\; s \in G$$

Συνεπώς για κάθε $s \in G$ *η απεικόνιση* $f \to f(s) : \ell^2 G \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχής.*

Η ομάδα G δρα στην G μέσω αριστερών μετατοπίσεων (left translations) $t \to st$. Η δράση αυτή μεταφέρεται στις συναρτήσεις: για κάθε $s \in G$ ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\lambda_s : \delta_t \to \delta_{st}$$

και επεκτείνουμε γραμμικά σε μια απεικόνιση $\lambda_s : c_{00}G \to c_{00}G$. Η επέκταση αυτή είναι ισομετρία στην νόρμα του ℓ^2. Πράγματι, αν $\xi \in c_{00}G$,

$$\|\lambda_s \xi\|_2^2 = \left\| \sum_{t \in G} \xi(t)\delta_{st} \right\|_2^2 = \sum_{t \in G} |\xi(t)|^2 = \|\xi\|_2^2 .$$

Επομένως η λ_s επεκτείνεται σε μια ισομετρία $\lambda_s : \ell^2(G) \to \ell^2(G)$. Από τη σχέση $\lambda_s \lambda_t = \lambda_{st}$ βλέπουμε ότι $\lambda_s \lambda_{s^{-1}} = \lambda_e = I$, που σημαίνει ότι η λ_s είναι και επί, συνεπώς unitary. Παρατηρούμε ότι

$$\text{Αν } \; f \in \ell^2(G), \quad (\lambda_s f)(t) = f(s^{-1}t).$$

Η απεικόνιση $s \mapsto \lambda_s : G \to \mathcal{B}(\ell^2 G)$ λέγεται η **αριστερή κανονική αναπαράσταση (left regular representation) της G στον $\ell^2(G)$**.

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια τελεστών $\{\lambda_t : t \in G\} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2 G)$ είναι ομάδα (ισόμορφη με την G) από unitary τελεστές και άρα η $\text{span}\{\lambda_t : t \in G\}$ είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα φραγμένων τελεστών στον $\ell^2(G)$ και περιέχει τον ταυτοτικό.

Ορισμός 1. *Συμβολίζουμε* $\text{vN}(G)$ *ή* $\mathcal{L}(G)$ *την* sot-*κλειστή γραμμική θήκη της ομάδας των unitary τελεστών* $\{\lambda_t : t \in G\}$, *δηλαδή*

$$\mathcal{L}(G) := \overline{\text{span}\{\lambda_t : t \in G\}}^{\text{sot}} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(G)).$$

[1] gpvnart, 13 Ιανουαρίου 2020

Η $\mathcal{L}(G)$ *ονομάζεται η* **άλγεβρα von Neumann** *της ομάδας.*

Ομοίως ορίζουμε

$$\mathcal{R}(G) := \overline{\text{span}\{\rho_t : t \in G\}}^{\text{sot}} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(G))$$

όπου $(\rho_s f)(t) = f(ts), \quad f \in \ell^2(G).$ [2]

Είναι φανερό ότι οι μετατοπίσεις αριστερά μετατίθενται με τις μετατοπίσεις δεξιά: Αρκεί να δει κανείς ότι

$$\lambda_s(\rho_t(\delta_r)) = \lambda_s(\delta_{rt^{-1}}) = \delta_{s(rt^{-1})} = \delta_{(sr)t^{-1}} = \rho_t(\delta_{sr}) = \rho_t(\lambda_s(\delta_r))$$

για κάθε $r \in G$, άρα $\lambda_s \rho_t = \rho_t \lambda_s$.

Αυτό δείχνει ότι κάθε λ_s μετατίθεται με το σύνολο $\{\rho_t : t \in G\}$, και συνεπώς μετατίθεται με την sot-κλειστή γραμμική του θήκη. Δηλαδή έχουμε

$$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{R}(G)' .$$

Στόχος είναι να δείξουμε ότι ισχύει ισότητα.

Αριστερά φραγμένα στοιχεία

Αν $f, g \in \ell^2(G)$, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{s \in G} |f(s)g(s^{-1}t)| \overset{(CS)}{\leqslant} \left(\sum_{s \in G} |f(s)|^2 \sum_{s \in G} |g(s^{-1}t)|^2 \right)^{1/2} \overset{(r=s^{-1}t)}{=} \left(\sum_{s \in G} |f(s)|^2 \sum_{r \in G} |g(r)|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2$$

άρα για κάθε $t \in G$ η σειρά $\sum_{s \in G} f(s)g(s^{-1}t)$ συγκλίνει απόλυτα οπότε ορίζεται η **συνέλιξη (convolution)**

$$(f * g)(t) = \sum_{s \in G} f(s)g(s^{-1}t), \quad t \in G .$$

Δείξαμε ότι $|(f * g)(t)| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$ για κάθε $t \in G$. Ορίζεται λοιπόν μια γραμμική απεικόνιση

$$L_f : \ell^2(G) \to \ell^\infty(G) : g \mapsto f * g .$$

Ορισμός 2. *Ένα* $f \in \ell^2(G)$ *λέγεται* **αριστερά φραγμένο (left bounded, or a left convolver)** *αν* $f * g \in \ell^2 G$ *για κάθε* $g \in \ell^2 G$, *δηλαδή αν* $L_f(\ell^2(G)) \subseteq \ell^2(G)$. *Γράφουμε* $f \in \mathcal{LC}(G)$.

[2] Εύκολα φαίνεται ότι $\rho_s(\delta_t) = \delta_{ts^{-1}}$, και ότι κάθε ρ_s είναι unitary.

Παραδείγματα 2. *(α) Προφανώς κάθε δ_s είναι αριστερά φραγμένο και $L_{\delta_s} = \lambda_s$. Συνεπώς κάθε $f \in c_{00}(G)$ είναι αριστερά φραγμένο και $L_f = \sum_{s \in G} f(s)\lambda_s$ (πεπερασμένο άθροισμα). Η αυτοσυζυγής μοναδιαία άλγεβρα*

$$\text{span}\{\lambda_s : s \in G\} = \{L_f : f \in c_{00}G\}$$

ονομάζεται καμμιά φορά **η άλγεβρα της ομάδας (group algebra) ή ομαδοδακτύλιος (group ring)** *και συμβολίζεται $\mathbb{C}[G]$.*

(β) Στο $G = \mathbb{Z}$ η $f(n) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu\ n \leqslant 0 \\ \frac{1}{n^{3/4}} & \alpha\nu\ n \geqslant 1 \end{cases}$ είναι στον $\ell^2 G$ αλλά δεν είναι φραγμένο στοιχείο, γιατί $f * f \notin \ell^2 G$. [3]

Λήμμα 3. *Έστω $f \in \ell^2 G$. Αν $f \in \mathcal{LC}(G)$, τότε ο L_f είναι φραγμένος τελεστής στον $\ell^2 G$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{LC}(G)$. Τότε η $L_f : \ell^2 G \to \ell^2 G$ είναι γραμμική απεικόνιση μεταξύ χώρων Banach. Αρκεί λοιπόν (θεώρημα κλειστού γραφήματος) να δείξουμε ότι η L_f έχει κλειστό γράφημα. Ισοδύναμα (γιατί;) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία (g_n) του $\ell^2 G$ που ικανοποιεί $\|g_n\|_2 \to 0$ *και* $\|L_f(g_n) - h\|_2 \to 0$, ισχύει ότι $h = 0$.

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $s \in G$ έχουμε

$$|L_f(g_n)(s)| = |(f * g_n)(s)| \leqslant \|f\|_2 \|g_n\|_2 \to 0$$

επομένως,

$$h(s) = \langle h, \delta_s \rangle = \lim_n \langle L_f(g_n), \delta_s \rangle = \lim (f * g_n)(s) = 0$$

και συνεπώς $h = 0$, όπως θέλαμε. $\square$

Λήμμα 4. *Ένα $f \in \ell^2(G)$ ανήκει στο $\mathcal{LC}(G)$ αν και μόνον αν υπάρχει σταθερά $c \geqslant 0$ ώστε $\|f * g\|_2 \leqslant c \|g\|_2$ για κάθε $g \in c_{00}(G)$.*

Απόδειξη. Αν $f \in \mathcal{LC}(G)$ τότε από το Λήμμα 3 ο τελεστής L_f ανήκει στον $\mathcal{B}(\ell^2 G)$ οπότε για κάθε $g \in c_{00}(G)$ έχουμε $\|f * g\|_2 \leqslant \|L_f\| \|g\|_2$.

Αν αντίστροφα υπάρχει c ώστε $\|f * g\|_2 \leqslant c \|g\|_2$ για κάθε $g \in c_{00}G$ τότε η γραμμική απεικόνιση

$$g \to f * g : (c_{00}G, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2 G, \|\cdot\|_2)$$

είναι συνεχής, συνεπώς επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή

$$T : (\ell^2 G, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2 G, \|\cdot\|_2)$$

[3] Ευχαριστίες στον κ. Γατζούρα!

που ικανοποιεί $T(g) = f * g$ *όταν* $g \in c_{00}(G)$. Ισχυρίζομαι ότι ο T ικανοποιεί τη σχέση αυτή *για κάθε* $g \in \ell^2 G$.

Πράγματι, έστω $g \in \ell^2 G$ και (g_n) ακολουθία του $c_{00}G$ με $\|g - g_n\|_2 \to 0$. Εφόσον ο T είναι φραγμένος, έχουμε $\|Tg - Tg_n\|_2 \to 0$ και συνεπώς (όπως είδαμε και προηγουμένως)

$$Tg(s) = \lim_n (Tg_n)(s) = \lim_n (f * g_n)(s)$$

για κάθε $s \in G$. Όμως από την άλλη μεριά,

$$|(f * g)(s) - (f * g_n)(s)| = |(f * (g - g_n))(s)| \leqslant \|f\|_2 \|g - g_n\|_2 \to 0$$

επομένως

$$(f * g)(s) = \lim_n (f * g_n)(s)) = Tg(s)$$

για κάθε $s \in G$.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $g \in \ell^2 G$ ισχύει ότι $f * g = Tg$, οπότε $L_f(\ell^2 G) \subseteq \ell^2 G$ δηλαδή $f \in \mathcal{LC}(G)$. $\square$

Συμβολισμός Θα χρησιμοποιούμε (καταχρηστικά) το σύμβολο $\mathcal{LC}(G)$ όχι μόνον για τα αριστερά φραγμένα στοιχεία $f \in \ell^2(G)$, αλλά και για τους τελεστές $L_f \in \mathcal{B}(\ell^2 G)$ που τα στοιχεία αυτά ορίζουν.

Πρόταση 5. *Το σύνολο* $\mathcal{LC}(G) \subseteq \mathcal{B}(\ell^2 G)$ *είναι* sot-*κλειστό υποσύνολο του* $\mathcal{B}(\ell^2 G)$ *και περιέχει την άλγεβρα von Neumann της ομάδας:*

$$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{LC}(G). \tag{1}$$

Απόδειξη. Έστω $T \in \overline{\mathcal{LC}(G)}^{\text{sot}}$. Θέτουμε $f := T\delta_e$ και θα δείξουμε ότι το f είναι αριστερά φραγμένο και $T = L_f$.

Αφού $T \in \overline{\mathcal{LC}(G)}^{\text{sot}}$, υπάρχει δίκτυο (L_{f_i}) στον $\mathcal{LC}(G)$ ώστε $L_{f_i} \stackrel{\text{sot}}{\to} T$, δηλαδή $\|T\xi - L_{f_i}\xi\|_2 \to 0$ για κάθε $\xi \in \ell^2 G$. Ειδικότερα $\|T\delta_e - L_{f_i}\delta_e\|_2 \to 0$ δηλαδή $\|f - f_i\|_2 \to 0$.

Τώρα για κάθε $\xi \in c_{00}G$ έχουμε

$$\|T\xi - f_i * \xi\|_\infty \leqslant \|T\xi - f_i * \xi\|_2 = \|T\xi - L_{f_i}\xi\|_2 \to 0$$

$$\text{αλλά επίσης} \quad \|f * \xi - f_i * \xi\|_\infty = \|(f - f_i) * \xi\|_\infty \stackrel{(CS)}{\leqslant} \|f - f_i\|_2 \|\xi\|_2 \to 0$$

άρα $(T\xi)(s) = \lim_i (f_i * \xi)(s) = (f * \xi)(s)$ για κάθε $s \in G$. Επομένως $T\xi = f * \xi$, άρα $\|f * \xi\|_2 \leqslant \|T\| \|\xi\|_2$ για κάθε $\xi \in c_{00}G$, οπότε από το Λήμμα 4 συμπεραίνουμε ότι το f είναι αριστερά φραγμένο στοιχείο (από $\|T\|$) και τώρα η ισότητα $T\xi = L_f\xi$ για κάθε $\xi \in c_{00}G$ δίνει $T = L_f$.

Ήδη έχουμε παρατηρήσει ότι κάθε $f \in c_{00}G$ είναι αριστερά φραγμένο στοιχείο και ότι $L_f = \sum_{s \in G} f(s)\lambda_s$. Συνεπώς το σύνολο $\mathcal{LC}(G)$ περιέχει το span$\{\lambda_t : t \in G\}$, οπότε (αφού είναι sot-κλειστό) θα περιέχει και την sot-κλειστή του θήκη, δηλαδή την $\mathcal{L}(G)$. $\square$

Ανάλογα με τον ορισμό αριστερά φραγμένου στοιχείου, ορίζουμε

Ορισμός 3. *Έστω $g \in \ell^2 G$. Θα λέμε ότι το g είναι* **δεξιά φραγμένο στοιχείο** *(γράφουμε $g \in \mathcal{RC}(G)$) αν $\xi \in \ell^2 G \Rightarrow \xi * g \in \ell^2 G$.*

Αποδεικνύεται ακριβώς όπως στο Λήμμα 3 ότι κάθε δεξιά φραγμένο στοιχείο g ορίζει φραγμένο τελεστή $R_g : f \mapsto f * g$. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathcal{RC}(G)$ και για το σύνολο των τελεστών αυτών.

Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως στην Πρόταση 5 ότι το $\mathcal{RC}(G)$ είναι sot κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{B}(\ell^2 G)$. Εφόσον προφανώς $R_g \in \mathcal{RC}(G)$ για κάθε $g \in c_{00}G$ έπεται ότι span$\{\rho_t : t \in G\} \subseteq \mathcal{RC}(G)$, και συνεπώς

$$\mathcal{R}(G) \subseteq \mathcal{RC}(G). \tag{2}$$

Πρόταση 6. $\mathcal{LC}(G) \subseteq \mathcal{RC}(G)'$.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{LC}(G)$. Για να δείξουμε ότι $f \in \mathcal{RC}(G)'$ πρέπει να δείξουμε ότι $R_g L_f = L_f R_g$ για κάθε $g \in \mathcal{RC}(G)$. [4] Επειδή οι $R_g L_f$ και $L_f R_g$ είναι φραγμένοι τελεστές στον $\ell^2 G$, αρκεί να δείξουμε ότι συμπίπτουν στην ορθοκανονική βάση του $\ell^2 G$, δηλαδή ότι

$$R_g L_f(\delta_s) = L_f R_g(\delta_s) \quad \text{για κάθε } \ s \in G\,.$$

Όμως $L_f(\delta_s) = f * \delta_s = \rho_{s^{-1}}(f)$, άρα $R_g L_f(\delta_s) = \rho_{s^{-1}}(f) * g$ και $R_g(\delta_s) = \delta_s * g = \lambda_s(g)$, άρα $L_f R_g(\delta_s) = f * \lambda_s(g)$, οπότε

$$\begin{aligned} R_g L_f(\delta_s)(t) &= (\rho_{s^{-1}}(f) * g)(t) = \sum_{x \in G} (\rho_{s^{-1}}(f)(x) g(x^{-1}t) = \sum_{x \in G} f(xs^{-1}) g(x^{-1}t) \\ \text{και} \quad L_f R_g(\delta_s)(t) &= (f * \lambda_s(g))(t) = \sum_{y \in G} f(y)(\lambda_s g)(y^{-1}t) = \sum_{y \in G} f(y) g(s^{-1}y^{-1}t) \end{aligned}$$

και θέτοντας $y = xs^{-1}$ στην τελευταία άθροιση έχουμε $R_g L_f(\delta_s)(t) = L_f R_g(\delta_s)(t)$. $\square$

Από την σχέση (2) προκύπτει ότι $\mathcal{RC}(G)' \subseteq \mathcal{R}(G)'$. Συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με την (1) και την τελευταία Πρόταση προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{LC}(G) \subseteq \mathcal{RC}(G)' \subseteq \mathcal{R}(G)'. \tag{3}$$

[4] Στην ουσία, πρόκειται για επέκταση της "προσεταιριστικής ιδιότητας" $(f * \xi) * g = f * (\xi * g)$. Πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί, επειδή η συνέλιξη ορίζεται μέσω οριακών διαδικασιών ("άπειρα αθροίσματα").

Θεώρημα 7. $\mathcal{L}(G) = \mathcal{LC}(G) = \mathcal{R}(G)'$. *Επομένως* $\mathcal{L}(G)' = \mathcal{R}(G)$.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι στην (3) έχουμε παντού ισότητα, δείχνουμε πρώτα ότι

Ισχυρισμός. $\mathcal{R}(G)' = \mathcal{LC}(G)$.

Πράγματι: Από την (3), αρκεί να δείξω ότι $\mathcal{R}(G)' \subseteq \mathcal{LC}(G)$. Έστω $T \in \mathcal{R}(G)'$. Θέτουμε $f = T\delta_e \in \ell^2 G$. Για κάθε $s \in G$ έχουμε $T\rho_{s^{-1}} = \rho_{s^{-1}}T$ από την υπόθεση και άρα

$$T\delta_s = T\rho_{s^{-1}}\delta_e = \rho_{s^{-1}}T\delta_e = \rho_{s^{-1}}f = f * \delta_s\,.$$

Έπεται ότι για κάθε $\xi \in c_{00}G$ ισχύει ότι $T\xi = f * \xi$ και συνεπώς $\|f * \xi\|_2 = \|T\xi\|_2 \leqslant \|T\|\|\xi\|_2$. Το Λήμμα 4 τώρα δείχνει ότι $f \in \mathcal{LC}(G)$ και $L_f = T$. Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Επομένως $\mathcal{LC}(G) = \mathcal{RC}(G)' = \mathcal{R}(G)'$ από την (3).

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\mathcal{RC}(G) = \mathcal{L}(G)'$, άρα $\mathcal{RC}(G)' = \mathcal{L}(G)''$.

Όμως η $\mathcal{L}(G)$ είναι άλγεβρα von Neumann, συνεπώς από το θεώρημα του διπλού μεταθέτη έχουμε $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G)''$, άρα τελικά

$$\mathcal{L}(G) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}(G)'' = \mathcal{RC}(G)' = \mathcal{LC}(G) = \mathcal{R}(G)'\,.$$

Έπεται ότι $\mathcal{L}(G)' = \mathcal{R}(G)''$. Αλλά από το θεώρημα του διπλού μεταθέτη (και η $\mathcal{R}(G)$ είναι άλγεβρα von Neumann) έχουμε $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G)''$, άρα τελικά $\mathcal{L}(G)' = \mathcal{R}(G)$. □

Παρατήρηση 8. *Προκύπτει και μια περιγραφή όλων των τελεστών της άλγεβρας von Neumann που παράγουν οι αριστερές μετατοπίσεις* $\{\lambda_s : s \in G\}$*: Η* $\mathcal{L}(G)$ *είναι το σύνολο όλων των τελεστών* L_f *που προκύπτουν από αριστερά φραγμένα στοιχεία του* $\ell^2 G$*:*

$$\mathcal{L}(G) = \{L_f : f \in \ell^2 G \text{ αριστερά φραγμένο}\}.$$

Με άλλα λόγια, η $\mathcal{L}(G)$ *είναι το σύνολο όλων των συνελίξεων* L_f *που ορίζουν φραγμένους τελεστές.*

Βιβλιογραφία

C. Anantharaman and S. Popa, *An introduction to II$_1$ factors*