ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

Για την πολλαπλασιαστική άλγεβρα

Έστω $H = L^2([0,1]) = L^2([0,1],m)$ (m: μέτρο Lebesgue). Αν $f \in C([0,1])$, τότε για κάθε συνάρτηση $h \in L^2([0,1])$ το κατά σημείο γινόμενο fh είναι μετρήσιμη συνάρτηση και επιπλέον

$$\int |fh|^2 dm \leqslant \|f\|_\infty^2 \int |h|^2 dm.$$

Επομένως $fh \in L^2([0,1])$. Ορίζεται λοιπόν ο τελεστής $M_f : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ από τη σχέση $M_f h = fh$ και είναι φραγμένος, αφού $\|M_f h\|_2 \leqslant \|f\|_\infty \|h\|_2$. (Αποδεικνύεται ότι $\|M_f\| = \|f\|_\infty$).

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{M}_0 = \{M_f : \ f \in C([0,1])\}$$

φραγμένων τελεστών στον $H = L^2([0,1])$.

Η $\mathcal{M}_0$ είναι μεταθετική $*$-άλγεβρα με μονάδα (και άρα $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_0'$). Εξετάζουμε αν είναι μεγιστική αβελιανή (masa). Ισοδύναμα, αν κάποιος $T \in \mathcal{B}(L^2([0,1]))$ ικανοποιεί τη σχέση $TM_g = M_g T$ για κάθε $g \in C([0,1])$, είναι αλήθεια ότι υπάρχει συνάρτηση f ώστε $T = M_f$;

Αν αναζητούμε *συνεχή* συνάρτηση f, η απάντηση είναι αρνητική:

Παράδειγμα 1. *Αν A είναι Borel υποσύνολο του $[0,1]$ με $0 < m(A) < 1$ (π.χ. $A = [0, \frac{1}{2}]$) και ορίσουμε*

$$Th(t) = \begin{cases} h(t), & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases} \quad (h \in L^2([0,1])),$$

τότε ο τελεστής T είναι φραγμένος (μάλιστα προβολή) και για κάθε $g \in C([0,1])$ έχουμε $TM_g h = T(g \cdot h) = g \cdot (Th) = M_g T h$ για κάθε $h \in L^2([0,1])$. Επομένως $T \in \mathcal{M}_0'$, αλλά $T \notin \mathcal{M}_0$, γιατί $T = M_\chi$, όπου $\chi = \chi_A$, που δεν είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση.

Παρατήρησε ότι ο μεταθέτης $\mathcal{M}_0'$ περιέχει όλους τους τελεστές M_f, όπου η συνάρτηση f είναι:

1. η χαρακτηριστική ενός μη-μηδενικού Borel υποσυνόλου του $[0,1]$
2. γραμμικός συνδυασμός τέτοιων συναρτήσεων, δηλ. απλή μετρήσιμη συνάρτηση
3. $\|\cdot\|_\infty$-όριο limit απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε $T \in \mathcal{M}_0'$ είναι πολλαπλασιαστικός τελεστής δηλ. $T = M_f$, όπου η f ανήκει σε μια κατάλληλη κλάση συναρτήσεων.

Έστω λοιπόν $T \in \mathcal{M}_0'$. Θέτουμε $f = T(\mathbf{1})$ (παρατήρησε ότι $\mathbf{1} \in L^2([0,1])$, εφόσον $m([0,1]) < \infty$). Για κάθε $h \in C([0,1])$, από τη σχέση $TM_h = M_h T$ έχουμε:

$$T(h) = T(h\mathbf{1}) = T(M_h \mathbf{1}) = M_h(T(\mathbf{1})) = M_h f = fh.$$

Αν δείξουμε ότι η απεικόνιση $h \to fh$ ορίζει φραγμένο τελεστή στον $L^2([0,1])$, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $C([0,1])$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2([0,1])$, θα μπορέσουμε να συμπεράνουμε ότι $T(h) = fh$, για κάθε $h \in L^2([0,1])$. Αν βέβαια η f είναι φραγμένη, τότε

$$\|Th\|_2^2 = \int |fh|^2 dm \leqslant \|f\|_\infty^2 \int |h|^2 dm \Rightarrow \|f\|_\infty \geqslant \|T\|.$$

Ας εξετάσουμε κατά πόσον η f είναι φραγμένη. Για κάθε $\varepsilon > 0$, θέτουμε

$$E := E_\varepsilon = \{t \in [0,1] : \ |f(t)| > \|T\| + \varepsilon\}.$$

Αν $m(E) > 0$, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει συμπαγές K και ανοιχτό U με $K \subseteq E \subseteq U$ και $m(U \backslash K) < \delta$ (κανονικότητα του μέτρου). Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h : [0,1] \to [0,1]$ ώστε $h|_K = 1$ και $h|_{U^c} = 0$ (Urysohn). Η h ορίζει μη-μηδενικό στοιχείο του $L^2([0,1])$ και

$$(\|T\|\|h\|_2)^2 \geqslant \|T(h)\|_2^2 = \int |fh|^2 dm \geqslant \int_E |fh|^2 dm \geqslant (\|T\| + \varepsilon)^2 \int_E |h|^2 dm \geqslant (\|T\| + \varepsilon)^2 \int_K |h|^2 dm$$

$$\text{άρα} \quad \|T\|^2 \, m(U) \geqslant \|T\|^2 \int_U |h|^2 = \|T\|^2 \int |h|^2 dm \geqslant (\|T\| + \varepsilon)^2 \int_K |h|^2 dm \geqslant (\|T\| + \varepsilon)^2 m(K)$$

$$\text{οπότε} \quad \frac{\|T\|^2}{(\|T\| + \varepsilon)^2} \geqslant \frac{m(K)}{m(U)} \geqslant \frac{m(E) - \delta}{m(E) + \delta}\,.$$

Αφού το $\delta > 0$ ήταν αυθαίρετο, έπεται ότι $\frac{\|T\|^2}{(\|T\|+\varepsilon)^2} \geqslant 1$, άτοπο. Δείξαμε ότι $m(E_\varepsilon) = 0$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν γράψουμε $E_n = \{t \in [0,1] : \ |f(t)| > \|T\| + \frac{1}{n}\}$, τότε $m(E_n) = 0$ και συνεπώς

$$m\left(\{t \in [0,1] : \ |f(t)| \geqslant \|T\|\}\right) = m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} m(E_n) = 0.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η f είναι *ουσιωδώς φραγμένη* μετρήσιμη συνάρτηση: ικανοποιεί $|f(t)| \leqslant \|T\|$ για κάθε t έξω από ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Έπεται ότι η απεικόνιση $h \to fh$ ορίζει φραγμένο τελεστή M_f στον $L^2([0,1])$, και τώρα η ισότητα $Th = fh = M_f h$ για $h \in C([0,1])$ δείχνει ότι $T = M_f$, αφού ο $C([0,1])$ είναι πυκνός στον $L^2([0,1])$.

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\mathcal{M}_0' \subseteq \mathcal{M}_m := \{M_f : \ f \in L^\infty([0,1])\}.$$

Επειδή προφανώς $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_m$, έπεται ότι $\mathcal{M}_m' \subseteq \mathcal{M}_0'$. Τέλος αφού η $\mathcal{M}_m$ είναι αβελιανή, έχουμε $\mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{M}_m'$, και συνεπώς

$$\mathcal{M}_m \subseteq \mathcal{M}_m' \subseteq \mathcal{M}_0' \subseteq \mathcal{M}_m.$$

Επομένως $\mathcal{M}_m = \mathcal{M}_m'$, και άρα η $\mathcal{M}_m$ είνα masa. Συνοψίζουμε

Παράδειγμα 2. *Ο μεταθέτης $\mathcal{M}_0'$ της $\mathcal{M}_0$ είναι η $\mathcal{M}_m := \{M_f : \ f \in L^\infty([0,1])\}$. Η άλγεβρα $\mathcal{M}_m$ είναι masa στον $L^2([0,1])\}$ και είναι μη-ατομική με την έννοια ότι κάθε μη-μηδενική προβολή $P \in \mathcal{M}$ περιέχει γνησίως μια άλλη μη-μηδενική προβολή $Q \in \mathcal{M}$, δηλαδή $\{0\} \neq Q(H) \subsetneq P(H)$.*