Για τη wot

Πρόταση 1. *Ένα* κυρτό *υποσύνολο (ειδικότερα, ένας* γραμμικός υπόχωρος*)* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ *είναι* sot-*κλειστός αν και μόνον αν είναι* wot-*κλειστός.*

Απόδειξη. Εφόσον η wot είναι ασθενέστερη τοπολογία από την sot, έχουμε $\overline{\mathcal{S}}^{\text{sot}} \subseteq \overline{\mathcal{S}}^{\text{wot}}$.

Έστω τώρα $A \in \overline{\mathcal{S}}^{\text{wot}}$. Για να δείξουμε ότι $A \in \overline{\mathcal{S}}^{\text{sot}}$ θεωρούμε μια sot-περιοχή του A, έστω

$$V := V(A, x_1, \dots, x_n) = \{T \in \mathcal{B}(H) : \|Tx_k - Ax_k\| < 1, k = 1, \dots, n\}$$

και θα δείξουμε ότι η V περιέχει κάποιο $T \in \mathcal{S}$.

Θεωρούμε το $A^{(n)}\vec{x} := (Ax_1, \dots, Ax_n) \in H^n$ και το κυρτό υποσύνολο

$$K = \{T^{(n)}\vec{x} = (Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n) : T \in \mathcal{B}(H)\} \subseteq H^n.$$

Αρκεί να δείξω τον Ισχυρισμό:

Ισχυρισμός . Το $A^{(n)}\vec{x}$ ανήκει στην κλειστή θήκη $\overline{K}$ του K (στην τοπολογία της νόρμας του H^n).

Γιατί τότε, θα υπάρχει $\epsilon > 0$ (και μπορώ να υποθέσω $\epsilon \in (0,1)$) και $T^{(n)}\vec{x} \in K$ ώστε $\left\|A^{(n)}\vec{x} - T^{(n)}\vec{x}\right\|_{H^n} < \epsilon$, δηλαδή $\sum\limits_{k=1}^{n} \|Ax_k - Tx_k\|_H^2 < \epsilon^2$. Μα τότε θα έχουμε $T \in \mathcal{S}$ και $\|Ax_k - Tx_k\|_H < 1$ για $k = 1, \dots, n$, δηλαδή $T \in V$, όπως θέλαμε.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Πράγματι, αν όχι, τότε από το διαχωριστικό Θεώρημα Hahn-Banach (δες πιο κάτω) έπεται ότι θα υπήρχε μια συνεχής $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση $\phi : H^n \to \mathbb{R}$ και ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\phi(A^{(n)}\vec{x}) > \lambda \geqslant \phi(\vec{z}) \quad \forall \vec{z} \in K\,.$$

Όμως αφού ο H^n είναι χώρος Hilbert, η ϕ είναι της μορφής

$$\phi(\vec{z}) = \mathrm{Re}\langle \vec{z}, \vec{y} \rangle, \quad \vec{z} \in H^n$$

για κάποιο $\vec{y} \in H^n$. Θα έχουμε λοιπόν,

$$\mathrm{Re}\langle A^{(n)}\vec{x}, \vec{y}\rangle > \lambda \geqslant \mathrm{Re}\langle T^{(n)}\vec{x}, \vec{y}\rangle \quad \forall T^{(n)}\vec{x} \in K$$

$$\text{ή} \quad \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\langle Ax_k, y_k\rangle > \lambda \geqslant \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\langle Tx_k, y_k\rangle \quad \forall T^{(n)}\vec{x} \in K\,.$$

Όμως $A \in \overline{\mathcal{S}}^{\text{wot}}$, άρα υπάρχει ένα δίκτυο (T_i) από το $\mathcal{S}$ ώστε $T_i \xrightarrow{\text{wot}} A$. Τότε όμως $\mathrm{Re}\sum\limits_{k=1}^{n}\langle Ax_k, y_k\rangle = \lim\limits_i \mathrm{Re}\sum\limits_{k=1}^{n}\langle T_i x_k, y_k\rangle \leqslant \lambda$, σε αντίθεση με την προηγούμενη ανισότητα.

Υπενθύμιση (Διαχωριστικό Θεώρημα Hahn - Banach)
Αν E χώρος με νόρμα, $K \subseteq E$ κυρτό, κλειστό και $x \notin K$, υπάρχει (κλειστό $\mathbb{R}$-υπερεπίπεδο που τα διαχωρίζει, δηλαδή) $\phi : E \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\mathbb{R}$-γραμμική και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\phi(x) > \lambda \geqslant \phi(y) \;\; \forall y \in K .$$

Αν ο E είναι χώρος Hilbert, το Θεώρημα είναι εύκολη συνέπεια της ύπαρξης πλησιέστερου διανύσματος.

Πράγματι, αφού το $K \subseteq E$ είναι κυρτό και κλειστό, υπάρχει (μάλιστα μοναδικό) $x_K \in K$ τέτοιο ώστε

$$\|x - x_k\| \leqslant \|x - y\| \quad \forall y \in K .$$

Έστω $t \in (0,1)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $y \in K$ έχουμε

$$x_k - t(y - x_k) = ty + (1-t)x_k \in K$$

και συνεπώς

$$\|x - x_k\|^2 \leqslant \|x - x_k - t(y - x_k)\|^2 \quad \forall y \in K .$$

Αναπτύσσοντας το εσωτερικό γινόμενο, η προηγούμενη δίνει

$$\begin{aligned}
\|x - x_k\|^2 &\leqslant \|x - x_k\|^2 + t^2 \|y - x_K)\|^2 - 2t\mathrm{Re}\langle y - x_k, x - x_k\rangle \\
2t\mathrm{Re}\langle y - x_k, x - x_k\rangle &\leqslant t^2 \|y - x_K)\|^2 \\
\text{άρα} \quad 2\mathrm{Re}\langle y - x_k, x - x_k\rangle &\leqslant t \|y - x_K)\|^2 \quad \forall t \in (0,1) \\
\text{και συνεπώς} \quad 2\mathrm{Re}\langle y - x_k, x - x_k\rangle &\leqslant 0 .
\end{aligned}$$

Αν λοιπόν ορίσουμε $\phi(y) = \mathrm{Re}\langle y, x\rangle$ και θέσουμε $\lambda = \phi(x_k)$, τότε η ϕ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική και συνεχής και ικανοποιεί

$$\begin{aligned}
\phi(y) - \lambda &= \phi(y - x_K) = \mathrm{Re}\langle y - x_k, x - x_k\rangle \leqslant 0 \quad \forall y \in K \\
\text{ενώ} \quad \phi(x) - \lambda &= \phi(x - x_K) = \mathrm{Re}\langle x - x_k, x - x_k\rangle = \|x - x_K\|^2 > 0
\end{aligned}$$

αφού $x \notin K$, οπότε

$$\phi(x) > \lambda \geqslant \phi(y) \;\; \forall y \in K .$$

Πρόταση 2. *Η μοναδιαία μπάλα* ball$(\mathcal{B}(H))$ *είναι* wot-*συμπαγής.*

Υπενθύμιση: Η τοπολογία γινόμενο. Αν $\{(Y_\gamma, \tau_\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων, θεωρούμε το καρτεσιανό τους γινόμενο

$$X := \prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma = \{(x(\gamma)) : x(\gamma) \in Y_\gamma \; \forall \gamma \in \Gamma\} .$$

Στην ειδική περίπτωση όπου όλοι οι Y_γ ταυτίζονται με κάποιον Y, πρόκειται απλώς για το σύνολο όλων των συναρτήσεων $x : \Gamma \mapsto Y$, που συμβολίζεται και Γ^Y.

Η *τοπολογία γινόμενο* τ_p στο X είναι η ασθενέστερη τοπολογία για την οποία όλες οι "εκτιμήσεις"

$$e_\gamma : X \mapsto Y_\gamma : x \mapsto x(\gamma), \gamma \in \Gamma$$

είναι συνεχείς. Δηλαδή ένα δίκτυο (x_i) στοιχείων του X συγκλίνει στο $x \in X$ ως προς την τ_p αν και μόνον αν $e_\gamma(x_i) \to e_\gamma(x)$, δηλαδή $x_i(\gamma) \to x(\gamma)$ στον χώρο (Y_γ, τ_γ), για κάθε $\gamma \in \Gamma$. Πρόκειται λοιπόν για την τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία του Γ (: σύγκλιση κατά σημείο).

*Απόδειξη. (της Πρότασης **??**).* Ένας $A \in \mathcal{B}(H)$ ανήκει στην μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{B}(H)$ αν και μόνον αν $|\langle Ax, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ για κάθε $(x, y) \in H$. Ορίζουμε λοιπόν

$$D_{(x,y)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \|x\| \, \|y\|\}, \quad (x,y) \in H \times H$$
$$X := \prod_{(x,y)\in\Gamma} D_{(x,y)} \quad \text{όπου } \Gamma := H \times H\,.$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|A\| \leqslant 1 \quad &\iff \quad \omega_{x,y}(A) \in D_{(x,y)} \ \forall (x,y) \in H \times H \\ &\iff \quad (\omega_{x,y}(A)) \in X \\ &\iff \quad \psi_A \in X \end{aligned}$$

όπου $\psi_A(x, y) := \omega_{x,y}(A),\ (x, y) \in \Gamma$.

Παρατηρούμε τώρα ότι ένα δίκτυο (A_i) συγκλίνει στον A ως προς την wot αν και μόνον αν $\omega_{x,y}(A_i) \to \omega_{x,y}(A)$ για κάθε $(x, y) \in H \times H$, δηλαδή αν και μόνον αν $\psi_{A_i}(x, y) \to \psi_A(x, y)$ σε κάθε σημείο $(x, y) \in \Gamma$ δηλαδή αν και μόνον αν $\psi_{A_i} \to \psi_A$ ως προς την τοπολογία γινόμενο του X.

Δηλαδή η απεικόνιση $\Psi : \text{ball}(\mathcal{B}(H)) \mapsto X : A \mapsto \psi_A$ εμφυτεύει τον τοπολογικό χώρο $(\text{ball}(\mathcal{B}(H)), \text{wot})$ *ομοιομορφικά* στον (X, τ_p).

Αλλά κάθε $D_{(x,y)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, επομένως ο X είναι συμπαγής χώρος (Θεώρημα Τίχονοφ)! Για να δείξουμε λοιπόν ότι ο $(\text{ball}(\mathcal{B}(H)), \text{wot})$ είναι συμπαγής, αρκεί να δείξουμε ότι η εικόνα του $\Psi(\text{ball}(\mathcal{B}(H)))$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Ισοδύναμα, αν (A_i) είναι ένα δίκτυο στον $\text{ball}(\mathcal{B}(H))$ και η εικόνα του (ψ_{A_i}) συγκλίνει σε κάποιο $\psi \in X$ ως προς την τοπολογία γινόμενο του X, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $A \in \text{ball}(\mathcal{B}(H))$ ώστε $\psi = \psi_A$.

Έχουμε λοιπόν $\psi_{A_i} \to \psi$, δηλαδή $\psi_{A_i}(x, y) \to \psi(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \Gamma$. Αφού κάθε ψ_{A_i} είναι sesquilinear, τότε και το κατά σημείο όριό τους θα είναι sesquilinear.

Αλλά $\psi \in X$, δηλαδή $\psi(x, y) \in D_{(x,y)}$ για κάθε $(x, y) \in \Gamma$, δηλαδή $|\psi(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ για κάθε $(x, y) \in H \times H$.

Δηλαδή η απεικόνιση $\psi : H \times H \to \mathbb{C}$ είναι sesquilinear και φραγμένη. Από το Θεώρημα B.L.T. υπάρχει λοιπόν $A \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $\psi(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ για κάθε $(x, y) \in H \times H$. Μάλιστα $\|A\| \leqslant 1$, αφού $|\langle Ax, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ για κάθε $(x, y) \in H \times H$, δηλαδή $A \in \text{ball}(\mathcal{B}(H))$, όπως θέλαμε.

Πρόταση 3 (Θεώρημα B.L.T.). *Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $\psi : H \times K \mapsto \mathbb{C}$ είναι sesquilinear και φραγμένη, έστω από M, υπάρχει μοναδικός $A \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\psi(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ για κάθε $(x, y) \in H \times K$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $x \in H$ και θεωρούμε την απεικόνιση $f_x : K \mapsto \mathbb{C} : y \to \overline{\psi(x, y)}$. Παρατηρούμε ότι είναι γραμμική (γιατί η ψ είναι αντιγραμμική ως προς y) και φραγμένη (γιατί $|\psi(x, y)| \leqslant M \, \|x\| \, \|y\|$). Αφού ο K είναι χώρος Hilbert, υπάρχει ένα $z_x \in K$ ώστε $f_x(y) = \langle y, z_x\rangle$ για κάθε $y \in K$, δηλαδή $\psi(x, y) = \langle z_x, y\rangle$ για κάθε $y \in K$.

Έτσι ορίσθηκε μια απεικόνιση $A : H \mapsto \mathbb{C} : x \mapsto z_x$ ώστε $\psi(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ για κάθε $(x, y) \in H \times K$. Από τη σχέση αυτή φαίνεται εύκολα ότι η A είναι γραμμική απεικόνιση και φραγμένη από M, καθώς και ότι δεν υπάρχει άλλος φραγμένος τελεστής που να ικανοποιεί τη σχέση αυτή. □

Πόρισμα 4. *Αν ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος, η μοναδιαία μπάλα* $\text{ball}(\mathcal{B}(H))$ *είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμη στην* wot*, άρα και διαχωρίσμος χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική βάση του H. Ορίζουμε

$$d(T,S) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} |\langle (T-S)e_n, e_m \rangle| \qquad (T, S \in \operatorname{ball} \mathcal{B}(H)).$$

Ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει ότι η d ορίζει μία μετρική στην ball $\mathcal{B}(H)$ [1]. Αν ένα δίκτυο (T_i) στην ball $\mathcal{B}(H))$ συγκλίνει στον $T \in \operatorname{ball} \mathcal{B}(H))$ ως προς την wot, θα δείξω ότι $d(T_i, T) \to 0$.

Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \epsilon$, οπότε (αφού $|\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| \leqslant 2$) έχουμε

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} |\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| \leqslant \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} |\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| + 2\epsilon,$$

άρα

$$\begin{aligned}
d(T_i, T) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} |\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| + 2\epsilon \right) \\
&= \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| + 2\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} |\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| + 2\epsilon \right) + 2\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} |\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| + 2\epsilon \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} + 2\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&\leqslant \sum_{n,m=1}^{N} \frac{1}{2^{n+m}} |\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| + 4\epsilon\,.
\end{aligned}$$

Αφού $T_i \to T$ ως προς την wot, έχουμε $\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle \to 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει λοιπόν i_0 ώστε $\sum\limits_{n,m=1}^{N} \frac{1}{2^{n+m}} |\langle (T_i - T)e_n, e_m \rangle| < \epsilon$ για κάθε $i \geqslant i_0$ (αφού το άθροισμα έχει πεπερασμένο πλήθος όρων). Έπεται ότι $d(T_i, T) < 5\epsilon$ για κάθε $i \geqslant i_0$.

Δηλαδή $d(T_i, T) \to 0$. Επομένως η wot είναι ισχυρότερη από την τοπολογία που ορίζει η d. Αλλά η πρώτη είναι συμπαγής, άρα οι δύο τοπολογίες συμπίπτουν. (Στην πραγματικότητα δεν είναι δύσκολο να δειχθεί απευθείας ότι αν $d(T_i, T) \to 0$ τότε $T_i \to T$ ως προς την wot). $\square$

[1] αν $d(T,S) = 0$ τότε $\langle (T-S)e_n, e_m \rangle = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ άρα $(T-S)e_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $(T-S) = 0$