12 Φεβ 2018

$$S \circ T : H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{S} H_3$$

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$$

ειδικότερα $H_1 = H_2 = H_3 = H$

τότε $B(H)$: άλγεβρα

και $T \longrightarrow T^*$: $*$-άλγεβρα

ακόμη, $\|T^*T\| = \|T\|^2$
: C^*-άλγεβρα

Παράδ. $C([0,1])$ = συνεχείς συναρτ. $f : [0,1] \to \mathbb{C}$

$*$-αλγ $\begin{cases} \text{πράξεις κ.σ.} \\ \text{ενέλιξη: } f^*(t) = \overline{f(t)} \end{cases}$

νόρμα : $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$

Γενικότερα : $C(K)$
όπου K = συμπαγής T_2

Πώς να αναπαραστήσω την $C([0,1])$
ως τελεστές σε κατάλληλους
χώρους Hilbert H;

$$\varphi : C([0,1]) \to \mathcal{B}(H)$$

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(fg) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$$

$$\varphi(f^*) = (\varphi(f))^*$$

$$\|\varphi(f)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|f\|_\infty$$

$a = (a_n)$ τυχούσα ακολουθία $a_n \in \mathbb{C}$

$$\forall\, x = (x(n)) \in \ell^2(\mathbb{N})$$

κοιτάω: $(a_n x(n)) \overset{?}{\in} \ell^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x(n)|^2 \overset{?}{<} \infty$$

αν $(|a_n|)$ φραγμ. διότι τότε:

(και μόνο αν)

. ισχ.:

$$\leq \|a\|_\infty^2 \sum |x(n)|^2 < +\infty$$

είναι C^*-αλγ. $\longrightarrow$

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$$

$$a \longmapsto D_a$$

$\longleftarrow$ $\underline{1-1}$

είναι μια ισομετρική αναπαράσταση της $\ell^\infty(\mathbb{N})$

$$a+b \longmapsto D_a + D_b$$

$$ab \longmapsto D_a D_b$$

$$a^* \longmapsto (D_a)^*$$

$$\|a\|_\infty = \|D_a\|_{\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))}$$

O $\ell^2(\Gamma)$ αλλιώς: $\Gamma \neq \emptyset$ σύνολο ξερό

πλήθος

$$c_{00}(\Gamma) = \{x : \Gamma \to \mathbb{C} \text{ με } |\operatorname{supp} x| < +\infty\}$$

$$\operatorname{supp} x = \{t : x(t) \neq 0\}$$

θέτω:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{t \in \Gamma} x(t)\overline{y(t)}$$

: πεπερ. πλήθος $\neq \emptyset$

εσωτ. γινόμενο

$$\|x\|_2^2 = \sum |x(t)|^2$$

Έχει ον βάση $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$

Η πλήρωση είναι ο $\ell^2(\Gamma)$

(Άσκ: είναι ο ίδιος με πριν)

Αναπαράσταση της $C([0,1])$

(1) $\mathcal{H} = \ell^2([0,1])$

ορίζω, $\forall f \in C([0,1])$: $D_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$(D_f x)(t) = f(t)x(t)$$

επειδή f είναι φραγμ. ($f \in \ell^\infty([0,1])$)

ο D_f ορίζεται και είναι φραγμ.

$$\|D_f\| = \|f\|_\infty$$

: Η αναπαράσταση $f \mapsto D_f$ είναι ο περιορισμός της αναπαράστασης

$$\ell^\infty([0,1]) \to B(\ell^2[0,1])$$
$$a \mapsto D_a$$

(2) Αν τώρα για το $[0,1]$ θεωρώ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο Γ του $[0,1]$ (π.χ. τους $\mathbb{Q}$) κάνω την ίδια δουλειά

Δηλ. $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma)$ έχει μια βάση $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$ αριθμήσιμη

$\Rightarrow \mathcal{H}$ διαχωρίσιμος

ορίζω όπως πριν

$$(\Pi_f x)(t) = f(t)x(t) \qquad x \in \ell^2(\Gamma)$$

έχω μια αναπαράσταση της $C([0,1])$ στον $\ell^2(\Gamma)$

$$\|\Pi_f\| \le \|f\|_\infty$$

διότι $\|\Pi_f x\|_2^2 = \sum_{t \in \Gamma} |f(t)x(t)|^2$

$$\le \|f\|_\infty^2 \sum |x(t)|^2$$

Είναι όμως 1-1 η $f \mapsto \Pi_f$

δηλ. αν ο τελεστής $\Pi_f = 0$ στον $\ell^2(\Gamma)$ είναι αληθές ότι $f(t) = 0$ $\forall t \in [0,1]$

Αποδ: $\Pi_f = 0 \iff \forall x \in \ell^2(\Gamma) : \Pi_f x = 0$

δηλαδή

$f(t)x(t) = 0$

$\forall t \in \Gamma$

όλως $f(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma$

και τώρα επικαλούμαι την πυκνότητα του Γ στο $[0,1]$ και το γεγονός ότι η f είναι συνεχής

(3) Θεωρώ ένα κανονικό μέτρο Borel μ στο $[0,1]$ και τον χώρο

$$L^2([0,1],\mu)$$

ο κ. Κουμουλλής έχει αποδείξει ότι ο $C([0,1])$ είναι $\|\cdot\|_2$-πυκνός υπόχωρος του $L^2(\mu)$

Τώρα, ορίζω $\forall f \in C([0,1])$ ή $f \in L^\infty([0,1],\mu)$ τον τελεστή $M_f : g \longmapsto fg$

έτσι έχω ορίσει αναπαράσταση της $L^\infty([0,1],\mu)$ στον $L^2([0,1],\mu)$ και τον περιορισμό της στα $C([0,1])$

Ερώτημα: Είναι πιστή;

$$M_f : L^2(\mu) \longrightarrow L^1(\mu)$$

$$M_f g = fg$$

?

Είναι $M_f = 0 \implies f = 0$

$\forall t \in [0,1]$

$f(t) = 0$

$$\forall g \in L^2(\mu), \quad fg = 0 \text{ του } L^2(\mu)$$

δηλ. $f(t)g(t) = 0 \quad \mu$ - σχεδόν $\forall t$

$\Downarrow$??

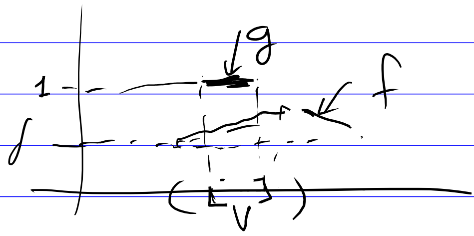
$f(t) = 0 \quad \forall t$

Έστω f συνεχής, και $f \neq 0$. Τότε $\exists$ ανοιχτό $U \subseteq [0,1]$, $U \neq \emptyset$

και $\exists\, d>0$:

ώστε $|f(t)| \geq d \quad \forall t \in U$

να βρω μια $g \in L^1(\mu)$: $fg \neq 0$



θα πάρω ένα μη τετριμμένο υποδιάστημα V του U και για g την χαρακτ. του V

οπότε $\forall t \in V$ έχουμε

$$|f(t)g(t)| = |f(t)| \geq d$$

οπότε: $M_f \neq 0$ ■

Χρειάσθηκε ότι $\forall U \neq \emptyset$ ανοιχτό, έχω $\lambda(U) > 0$

τι γίνεται γενικά για μέτρα;;

το $\mu = \delta_{1/2}$:

τότε $\forall f \in C[0,1]$ με $f(1/2) = 0$

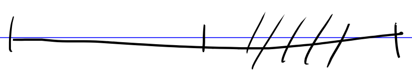
ισχύει ότι $\forall g \in L^2(\mu)$

έχω $(fg)(1/2) = 0$

άρα $(fg)(t) = 0$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in [0,1]$

Άλλο παράδ.: $\forall A \subseteq [0,1]$ Borel

ορίζω $\mu(A) = \lambda(A \cap [0, 1/2])$



μέτρο 0

τώρα, αν η f φέρεται στο $[\frac{1}{2}, 1]$ τότε $M_f = 0$

Συμπέρασμα: η $f \mapsto M_f$ είναι πιστή αναπαράσταση της $C([0,1])$ στον $L^2(\mu)$ $\iff$ $\operatorname{supp}\mu = [0,1]$

όπου $\operatorname{supp}\varphi = \left(\bigcup\{V \subseteq [0,1] \text{ ανοικτό} : \varphi(V) = 0\}\right)^c$

<u>Παρ/γ</u>: $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζουμε $(\lambda_t f)(s) = f(s-t)$

<u>Ισχ.</u> $\|\lambda_t f\|_2 = \|f\|_2$

<u>Αφού</u> $\|\lambda_t f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(s-t)|^2 ds$ θέτω $x = s-t$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2$$

διότι η μεταφορά διατηρεί το μέτρο <u>Lebesgue</u>

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) \ni a \longmapsto D_a = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & a(-2) & & & 0 & \\ & & a(-1) & & & \\ & & & a(0) & & \\ & 0 & & & a(1) & \\ & & & & & a(2) & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$$

U: shift $(Ux)(n) = x(n-1)$

$$U = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ \ddots & 0 & & & 0 & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & 0 & & & 1 & \ddots \end{bmatrix} \text{ σον } \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \ddots & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} \quad \ell^2(\mathbb{Z}_+)$$

$\ell^\infty = C^*$-άλγεβρα $\subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$

$U^k \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z})) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$(D_a U)(e_m) = D_a(e_{m+1}) = a(m+1)\, e_{m+1}$

$$D_a U = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & & & \\ & \ddots & & & \\ & a(-1) & a(0) & & \\ & & & a(1) & \ddots \end{bmatrix}$$

$(U D_a)(e_m) = U(a(m)\, e_m)$

$= a(m)\, e_{m+1}$

οπότε $U D_a \neq D_a U$

μάλιστα $U D_a = D_{a'} U$ όπου $a'(m) = a(m-1)$

$\forall m \in \mathbb{Z}$

$$D_a U + D_b U^2 + D_c U^{-3} + \dots$$

$$\sum_{n=-N}^{N} D_{a_n} U^n \neq \sum U^n D_{a_n}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n = \sum z^n a_n$$

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} D_{a_n} U^n : N \in \mathbb{Z}_+,\ a_n \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \right\}$$

$$\subseteq B(\ell^2(\mathbb{Z}))$$

$$\left(\mathcal{A}_0, \|\ \|_{B(\ell^2(\mathbb{Z}))}\right)$$

$$\left(\sum D_{a_n} U^n\right)\left(\sum D_{b_m} U^m\right) = \sum D_{c_i} U^i$$

: $\mathcal{A}_0$ είναι άλγεβρα

$$\left(c_i \neq \sum_{n+m=i} a_n b_m = \sum_{n+m=i} a_n \alpha_n(b_m) \right)$$

$$\left(\sum D_{a_n} U^n\right)^* = \sum_n (U^n)^* D^*_{a_n} = \sum_n U^{-n} D_{\bar{a}_n} = \sum_n D_{b_n} U^{-n}$$

$\mathcal{A}_0$ είναι $*$-άλγεβρα

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) \subseteq \overline{\left(\mathcal{A}_0, \|\ \|_{B(\ell^2(\mathbb{Z}))}\right)} = C^*\text{-άλγεβρα !}$$

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

αντικείμενο σύγχρονη έρευνας

Αν γυρίσω σε χώρο πεπερ. διάστασης: $\ell^2(N) = (\mathbb{C}^N, \|\|_2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ & & 0 & & & 0 \\ & 1 & & 0 & & \vdots \\ & & 1 & & 0 & \vdots \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$Ue_n = e_{n+1}$, $n < N$ $\quad Ue_N = e_1$

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_N \end{bmatrix}$$

$$D_b U = \begin{bmatrix} 0 & & & b_N \\ b_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_{N-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_c U^* = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & c_{N-1} \\ c_N & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}_N) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_N = M_N(\mathbb{C}) = B(\ell^2(N))$$

δεν έχει ενδιαφέρον