* Μεταξύ σελ. 102 - 103 λείπει μία εβδομάδα σημειώσεων τις οποίες θα βρείτε στην e-class : Σημειώσεις 2015 → Σημειώσεις για shifts.



14/05/2015

Υπενθύμιση.

- $A(\mathbb{D}) = \{ f \in C(\mathbb{T}) : \hat{f}(k) = 0 \ \forall k<0 \}$.
- Κάθε $f \in A(\mathbb{D})$ επεκτείνεται σε $\tilde{f}$ στο $C(\overline{\mathbb{D}})$ με $\tilde{f}|_{\mathbb{D}}$ ολόμορφη.

- $\rho : A(\mathbb{D}) \to B(H)$ : γραμμική
  $\rho(\mathbb{1}) = I$, $\|\rho\| = 1$.
- Τότε $\exists !$ $\tilde{\rho} : C(\mathbb{T}) \to B(H)$ θετική, δηλ. $f \geq 0 \Rightarrow \tilde{\rho}(f) \geq 0$ δηλ.
  $\langle \tilde{\rho}(f)x, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in H$.

Απ.

- Επεκτείνουμε την $\rho$: $\tilde{\rho} : A(\mathbb{D}) + A(\mathbb{D})^* \to B(H)$
  $$f + g^* \mapsto \rho(f) + \rho(g)^*$$
  [ $e_n(e^{it}) = e^{int}$ : $\tilde{\rho}(e_{-n}) = \rho(e_n)^*$ για $n>0$ ].

- Δείξαμε ότι η $\tilde{\rho}$ είναι καλά ορισμένη χρησιμοποιώντας το γεγονός : $A(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})^* = \mathbb{C}\mathbb{1}$

- Επεκτείνουμε την $\tilde{\rho}$ στο $C(\mathbb{T})$ : $A(\mathbb{D}) + A(\mathbb{D})^* \supset [e_n : n \in \mathbb{Z}]$
  πυκνό στο $C(\mathbb{T})$.

- Αρκεί ν.δ.ο. $\tilde{\rho}$ είναι συνεχής: $\exists M : \|\tilde{\rho}(f+g^*)\| \leq M\|f+g^*\|$

- $\|\tilde{\rho}(f+g^*)\| = \|\tilde{\rho}(f) + \tilde{\rho}(g^*)\| = \|\tilde{\rho}(f) + \tilde{\rho}(g)^*\| \leq \|\tilde{\rho}(f)\| + \|\tilde{\rho}(g)^*\| =$
  $\|\tilde{\rho}(f)\| + \|\tilde{\rho}(g)\| = \ldots \leq \|f\| + \|g\|$.
- Θα είμαστε ΟΚ αν $\exists M>0 : \|f\| + \|g^*\| \leq M\|f+g^*\|$
- $\overset{(=)}{\Leftrightarrow} \exists M' > 0 : \|f\| \leq M'\|f+g^*\|, \ \|g\| \leq M'\|f+g^*\|$ :

- Αν $\left.\begin{aligned} f(e^{it}) &= \sum_{n=0}^{N} c_n e^{int} \\ g(e^{it}) &= \sum \gamma_n e^{int} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (f+g^*)(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ και ζητάμε
  $$\Big\| \sum_{n=0}^{N} a_n e_n \Big\|_\infty \leq \Big\| \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \Big\|_\infty.$$

Παρατήρηση — στη ορθοκανονική (πυθαγόρειο).

$$\|\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2 \geq \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 = \|\sum_{n=0}^{N} a_n e_n\|_2^2$$

- $\rho : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \longrightarrow A(\mathbb{D})$

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \longmapsto \sum_{n=0}^{N} a_n e_n$$

- Για την $\|\cdot\|_2$ η $\rho$ είναι φραγμένη με $\|\rho\| = 1$

  $\|\cdot\|_p$ η $\rho$ είναι φραγμένη $(1 < p < \infty)$

  $\|\cdot\|_\infty$ η $\rho$ δεν είναι φραγμένη.

- Έστω $x \in H$, $\|x\| = 1$ και $\varphi_x : A(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f \longmapsto \langle \rho(f)x, x \rangle$$

που είναι γραμμική, $\varphi_x(\mathbb{1}) = 1$, $\|\varphi_x\| = 1$

- (Hahn-Banach)

  $\exists$ επέκταση $\psi_x : C(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\psi_x(\mathbb{1}) = 1$, $\|\psi_x\| = 1$.

- Άρα η $\psi_x$ είναι θετική γραμμική μορφή, άρα αυτοσυζυγής και $\psi_x(f^*) = \overline{\psi_x(f)}$ $\forall f \in C(\mathbb{T})$.

- Οπότε $\forall f, g \in A(\mathbb{D})$ ισχύει $\psi_x(f + g^*) = \psi_x(f) + \overline{\psi_x(g)} =$

  $\varphi_x(f) + \overline{\varphi_x(g)} = \langle \rho(f)x, x \rangle + \overline{\langle \rho(g)x, x \rangle} =$

  $\langle \rho(f)x, x \rangle + \langle x, \rho(g)x \rangle = \langle \rho(f)x, x \rangle + \langle \rho(g)^* x, x \rangle =$

  $\langle \tilde{\rho}(f + g^*)x, x \rangle$

- Άρα $|\langle \tilde{\rho}(f+g^*)x,x\rangle| \le \|\psi_x\|\cdot\|f+g^*\| = \|f+g^*\| \quad \forall x\in H, \|x\|=1 \Rightarrow$ polarization

  $|\langle \tilde{\rho}(f+g)x,y\rangle| \le 2\|f+g^*\| \quad \forall x,y\in H, \ \|x\|=1=\|y\| \Rightarrow$

- Η $\tilde{\rho}$ είναι φραγμένη.
- Αποδεικνύεται ότι επειδή η $\tilde{\rho}$ είναι θετική και $\tilde{\rho}(1)=I \Rightarrow$ $\|\tilde{\rho}\|=1$.

- Αν υποθέσουμε ότι η $\rho: A(\mathbb{D}) \longrightarrow B(H)$ γρ-τ, $\|\cdot\|=1$, $\rho(1)=I$ και επιπλέον $\rho(fg)=\rho(f)\rho(g)$

$$\Downarrow ? \ \rightarrow \text{όχι}$$

$$\tilde{\rho}(fg)=\tilde{\rho}(f)\tilde{\rho}(g)$$

π.χ

- Έστω $A\in B(H)$ συστολή ($\|A\|\le 1$) και ορίζουμε $\forall$ πολυώνυμο $f(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, $\rho(f)=\sum_{n=0}^{N} a_n A^n$, $\rho(e_n)=A^n$ $(n\ge 0)$

- Τότε $\tilde{\rho}(e_{-n})=\tilde{\rho}(e_n)^*=(A^*)^n$

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(e_1 e_{-1})=\tilde{\rho}(e_0)=I \\ \tilde{\rho}(e_1)\tilde{\rho}(e_{-1})=AA^* \end{cases} \neq$$

- Αυτό που μπορεί να κάνει κανείς είναι να βρει διαστολή $\tilde{\rho}$ σε $*$-αναπαράσταση της $C(\mathbb{T})$ σε χώρο $K\supset H$.

Απ.

- Έστω $\rho(e_1)=T$ ; $\|T\|=\|\rho(e_1)\|\le\|e_1\|=1$.
- $\exists$ χώρος Hilbert $K\supset H$ και $\exists$ unitary $U\in B(K)$ :

  $P_H U^m|_H = T^m \quad \forall m\ge 0$.
- Άρα $\forall$ $f$ πολυώνυμο $f(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n \Rightarrow f(T)=\sum a_n T^n=\rho(f)$

• Οπότε έχουμε την απεικόνιση $\pi : C(\mathbb{T}) \to B(K)$

$$f + g^* \mapsto f(U) + g(U)^*$$

με: $P\pi(f+g^*)|_H = \tilde{\rho}(f+g^*)$ και η $\pi$ είναι $*$-αναπαράσταση της $C(\mathbb{T})$ γιατί $\pi(e_n) = U^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. (αφού $U^{-m} = (U^*)^m$)

## Φασματικά Μέτρα.

• Έστω $T = T^* \in B(H)$, $\dim H < \infty$. Τότε $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές και $P_1, \dots, P_n$ προβολές στους ιδιοχώρους.

$\Big\}$ $\dim H = \infty$

• $$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dP_\lambda \quad , \text{"}P\text{" φασματικό μέτρο.}$$

### Ορισμός

Έστω $(K, S)$ μετρήσιμος χώρος. Μια οικογένεια $\{E(\Omega) : \Omega \in S\}$ τελεστών σε ένα χώρο Hilbert $H$ λέγεται φασματικό μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1) $E(\Omega)^* = E(\Omega)$
2) $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1) \cdot E(\Omega_2)$
3) $E(\emptyset) = 0$ και $E(K) = I$
4) $\forall x \in H$ η απεικόνιση $\mu_x : \Omega \mapsto \langle E(\Omega)x, x \rangle$ είναι θετικό μέτρο ορισμένο στην $S$.

Π.χ

• $(K, S, \mu)$ χώρος μέτρου, $H = L^2(K, \mu)$
• $\forall \Omega \in S$, $E(\Omega) = M_{\chi_\Omega}$ = προβ. στο $\{f \in L^2 : f|_{\Omega^c} = 0 \ \mu\text{-σ.π}\}$.

- $E(\Omega)^* = E(\Omega)$, $E(\Omega \cap \Omega) = E(\Omega)^2$ : $E(\Omega)$ ορθ. προβ.

Απ.

Απόδειξη: $\forall x$, $\mu_{xx}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x\rangle$ μέτρο σ- προσθετικό.
$\qquad \qquad \| E(\Omega)x\|^2$.

σ-προσθετικότητα.

Αν $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, ξένα ανά δύο, τότε $\mu_{xx}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{xx}(\Omega_n)$ και $\|E(\Omega)x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|E(\Omega_n)x\|^2 \quad \forall x \in H$

Όμως δεν ισχύει: $\|E(\Omega) - \sum_{n=1}^{N} E(\Omega_n)\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ διότι:

$\sum_{n=1}^{N} E(\Omega_n) = E\left(\bigcup_{n=1}^{N} \Omega_n\right)$ και άρα $\|E(\Omega) - E(\bigcup_{n=1}^{N} \Omega_n)\| =$

$\|E(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} \Omega_n)\| = 1$ αν δεν είναι η μηδενική προβολή.

Ολοκλήρωση ως προς E

- Αν $f: K \to \mathbb{C}$ απλή μετρήσιμη (ως προς $\mathcal{S}$) δηλ.
  $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Omega_k}$, $\Omega_k \in \mathcal{S}$ ξένα ανά δύο.

- Ορίζουμε $\boxed{\int f\, dE = \sum_{k=1}^{n} c_k E(\Omega_k) \in B(H)}$

- Θέτουμε $A(K, \mathcal{S}) \equiv$ απλές μετρήσιμες $f: K \to \mathbb{C}$

- Έστω $\Theta: A \to B(H)$ : γραμμική, θετική (διότι αν $f \geq 0$ τότε
  $f \mapsto \int f\, dE \qquad f = \sum c_k \chi_{\Omega_k}, c_k \geq 0 \Rightarrow \Theta(f) = \sum \underset{\geq 0}{c_k} \underbrace{E(\Omega_k)}_{\text{θετικοί}} \geq 0)$

- Θέλουμε να επεκτείνουμε την $\vartheta$ στο $L^\infty(K) = \{f : K \to \mathbb{C}$ φραγμ., μετρ. συναρτήσεις$\}$.

- $(L^\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι $C^*$-άλγεβρα.
- $L^\infty(K) \subset \ell^\infty(K) \leftarrow$ Banach

↑

Διότι το ομοιόμορφο όριο φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων είναι φραγμ. μετρ. συνάρτηση.

- $A(K, \Sigma) \subset L^\infty(K)$

↑ πυκνός υπόχωρος.

- Αρκεί λοιπόν ν.δ.ο η $\vartheta$ είναι συνεχής: $\|\vartheta(f)\| \leq \|f\|_\infty$ $\forall f \in A(K, \Sigma)$.

- Έστω λοιπόν, $f = \sum c_k \chi_{\Omega_k}$ όπως πριν.
- $\forall x \in H$, $\|\vartheta(f)x\|_H^2 = \|(\sum c_k \overset{\perp \text{ ανά δύο}}{E(\Omega_k)})x\|_H^2 \overset{\text{Πυθαγόρας}}{=}$ $\sum |c_k|^2 \|E(\Omega_k)x\|^2 \leq \max |c_k|^2 (\sum \|E(\Omega_k)x\|^2) =$ $\max|c_k|^2 \|\sum E(\Omega_k)x\|^2 \leq \max|c_k|^2 \|x\|^2$.

- Οπότε επεκτείνεται σε $\tilde{\vartheta} : L^\infty(K) \to B(H)$

$$f \mapsto \boxed{\tilde{\vartheta}(f) = \int f \, dE}$$

Παρατήρηση

- Η $\tilde{\vartheta}$ είναι $*$-ομομορφισμός. (όχι αναγκαστικά ισομετρία ούτε 1-1)
- Είναι γραμμική και $\tilde{\vartheta}(f)^* = \tilde{\vartheta}(f^*)$ για απλές διότι $\tilde{\vartheta}$ θετική ή αλλιώς αν $f = f^*$ και απλή τότε $f = \sum c_k \chi_{\Omega_k}$, $c_k = \overline{c_k}$ $\forall k \Rightarrow \tilde{\vartheta}(f) = \sum c_k E(\Omega_k) \Rightarrow \tilde{\vartheta}(f)$ αυτοσυζυγής

- Επίσης $\tilde{\vartheta}(fg) = \tilde{\vartheta}(f)\cdot\tilde{\vartheta}(g)$.
- $\exists$ περίπτωση $f = \sum c_k \chi_{\varrho_k}$, $g = \sum d_k \chi_{\varrho_k}$ με την ίδια διαμέριση $\varrho_1, \dots, \varrho_k$ του $K$.

- Οπότε $fg = \sum_{k,n} c_k d_n \chi_{\varrho_k} \chi_{\varrho_n} = \sum_{k,n} c_k d_n \chi_{(\varrho_k \cap \varrho_n)} = \sum_k c_k d_k \chi_{\varrho_k}$

- Άρα $\tilde{\vartheta}(fg) = \sum c_k d_k E(\varrho_k)$.

$$\tilde{\vartheta}(f)\cdot\tilde{\vartheta}(g) = \sum_k c_k E(\varrho_k) \cdot \sum_n d_n E(\varrho_n) = \sum_{k,n} c_k d_n E(\varrho_k) E(\varrho_n) = \sum_k c_k d_k E(\varrho_k)$$ (αφού $E(\varrho_i) \perp$ ανά δύο)

Το περίεργο: Εδώ ισχύει $\boxed{\int fg\, dE = \left(\int f\, dE\right)\cdot\left(\int g\, dE\right)}$

- Έστω απλή $f = \sum c_k \chi_{\varrho_k}$, $\int f\, dE = \sum c_k E(\varrho_k)$.
- Τότε $\langle \left(\int f\, dE\right) x, x\rangle = \sum c_k \langle E(\varrho_k)x, x\rangle = \sum c_k \mu_{xx}(\varrho_k)$.

- Επίσης $\int f\, d\mu_{xx} = \int \left(\sum c_k \chi_{\varrho_k}\right) d\mu_{xx} = \sum c_k \int \chi_{\varrho_k}\, d\mu_{xx} = \sum c_k \mu_{xx}(\varrho_k)$

- Άρα γενικότερα για $f \in L^\infty(K)$ $\boxed{\forall x \in H: \langle \left(\int f\, dE\right)x, x\rangle = \int f\, d\mu_{xx}}$

- Ισοδύναμα, θεωρούμε την sesq. μορφή $B_f : H \times H \to \mathbb{C}$ με $B_f(x,y) = \int f\, d\mu_{xy}$.
- Επειδή είναι sesq. + φραγμ. $\Rightarrow \exists!$ φρ. τελ. $\tilde{\vartheta}(f)$:

$$\boxed{\langle \tilde{\vartheta}(f)x, y\rangle = \int f\, d\mu_{xy}}$$

- Εξετάζουμε πότε $\tilde{\vartheta}(f)=\int f\,dE=0$.

$$\Updownarrow$$

$\langle (\int f\,dE)x, x\rangle = 0 \quad \forall x.$

$\quad \overset{\shortparallel}{\int f\,d\mu_{xx}}$

- Αν $f \geq 0$ τότε $\int f\,d\mu_{xx}=0$ ανν $f=0$ $\mu_{xx}$-σ.π.
δηλ. ανν $\exists\ \Omega_x \in \mathcal{S}$ με $\mu_{xx}(\Omega_x)=0$ ώστε
$f(t)=0 \quad \forall t \notin \Omega_x$.

Υποθέτουμε ότι $H$ διαχ.

- Έστω $\{x_1, x_2, \dots\}$ αριθμ. πυκνό. Ονομάζουμε $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{x_n}$.
- Τότε $\int f\,dE = 0 \iff f$ μηδενίζεται στο $\Omega^c$.

$\Rightarrow$ προφανώς

$\Leftarrow$ Αν $\int f\,d\mu_{x_n}=0 \quad \forall x$, δηλ.

$\langle (\int f\,dE)x, x\rangle = 0 \quad \forall x$ και αποδεικνύεται εύκολα ότι
$\langle (\int f\,dE)y, y\rangle = 0 \quad \forall y \in H$.

- Το ίδιο ισχύει για γενική $f: K \to \mathbb{C}$ διότι $\tilde{\vartheta}(f)=0 \iff$
$\tilde{\vartheta}(f)\tilde{\vartheta}(f)^* = \tilde{\vartheta}(ff^*)=0$ και $ff^* \geq 0$ και άρα ισχύει από τα
προηγούμενα.

Πρόταση ($H$ διαχ.)

$\int f\,dE = 0 \iff f$ μηδενίζεται $E$-σ.π.