Κεφάλαιο 6

Το Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Στόχος του Κεφαλαίου αυτού είναι να αποδείξουμε ότι κάθε αυτοσυζυγής τελεστής είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή. Ο τελεστής αυτός όμως δεν δρα κατ' ανάγκη στον $L^2([a, b])$, αλλά σε έναν γενικότερο χώρο μέτρου. Επομένως είναι αναγκαίο στο Κεφάλαιο αυτό να θεωρήσουμε γνωστές ορισμένες βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Μέτρου.

Ο χώρος μέτρου που θα χρησιμοποιήσουμε δημιουργείται ξεκινώντας από το *φάσμα* του τελεστή, που αποτελεί μία αναγκαία γενίκευση του συνόλου των ιδιοτιμών.

6.1 Το Φάσμα

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, το σύνολο $\sigma_p(T)$ των ιδιοτιμών ενός τελεστή T συμπίπτει με το σύνολο $\sigma(T)$ όλων των μιγαδικών αριθμών $\lambda \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ο τελεστής $T - \lambda I$ δεν έχει αντίστροφο. Το σύνολο των ιδιοτιμών είναι πάντα μη κενό, γιατί το σώμα $\mathbb{C}$ είναι *αλγεβρικά κλειστό*.

Το γεγονός αυτό έπαιξε κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος (Θεώρημα 4.2.7). Όμως, σε απειροδιάστατους χώρους υπάρχουν αυτοσυζυγείς τελεστές χωρίς ιδιοτιμές.

Παράδειγμα 6.1.1 *Ο τελεστής M_f στον $L^2([0,1])$, όπου $f(t) = t$, δεν έχει ιδιοτιμές.*

Απόδειξη Άσκηση 4.6.

Ορισμός 6.1.1 *Το **φάσμα (spectrum)** ενός φραγμένου τελεστή T σ' έναν χώρο Banach X είναι το σύνολο*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο τελεστής } T - \lambda I \text{ δεν έχει αντίστροφο }\}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι το φάσμα του τελεστή του τελευταίου παραδείγματος είναι ακριβώς το $[0,1]$.

Παράδειγμα: Πολλαπλασιαστικοί τελεστές

Υπενθύμιση:
Έστω (X,μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Ο χώρος $L^2(X,\mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, μετρησίμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, δηλαδή ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < \infty$. Η παράσταση

$$\langle f,g\rangle = \int_X f\bar{g}d\mu$$

είναι εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(X,\mu)$ (εφόσον $\langle f,f\rangle = 0$ αν και μόνον αν $f = 0$ μ-σχεδόν παντού). Ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο ο $L^2(X,\mu)$ είναι πλήρης (Θεώρημα Riesz-Fisher, βλ. [9], Θεώρημα 11.17), άρα χώρος Hilbert.

Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται **ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded)** αν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^+$ ώστε $\mu(\{x \in X : |f(x)| > A\}) = 0$. Κάθε τέτοιος αριθμός A λέγεται **ουσιώδες φράγμα** της f.

Ο χώρος $L^\infty(X,\mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, μετρησίμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που είναι ουσιωδώς φραγμένες. Αν ορίσουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{A : A \text{ ουσιώδες φράγμα της } f\}$$

τότε η $\|\cdot\|_\infty$ ορίζει νόρμα στον $L^\infty(X,\mu)$ ως προς την οποία γίνεται άλγεβρα Banach, αν οι πράξεις ορισθούν κατά σημείο.

Θα δείξουμε ότι κάθε $f \in L^\infty(X,\mu)$ ορίζει έναν φραγμένο τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$ από την σχέση $M_f(g) = fg$ και ισχύει $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Αν η f είναι ουσιωδώς φραγμένη και $|f(x)| \le A$, μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ τότε για κάθε $g \in L^2(X,\mu)$,

$$\int |fg|^2 d\mu \le A^2 \int |g|^2 d\mu$$

άρα $fg \in L^2(X,\mu)$. Επομένως η γραμμική απεικόνιση

$$M_f : L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu) : \ g \to fg$$

ορίζεται και είναι φραγμένη με $\|M_f\| \le A$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε ουσιώδες φράγμα A της f, έπεται ότι $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$.

Αντίστροφα, ισχυρίζομαι ότι αν ο M_f είναι φραγμένος τελεστής τότε η f είναι ουσιωδώς φραγμένη και μάλιστα

$$|f(x)| \le \|M_f\| \quad \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X. \tag{6.1}$$

Πράγματι, αρκεί να δείξω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$X_n = \{x \in X : |f(x)| > \|M_f\| + \frac{1}{n}\}$$

έχει μέτρο μηδέν (γιατί $\{x \in X : |f(x)| > \|M_f\|\} = \cup_n X_n$).
Όμως αν κάποιο X_n είχε θετικό μέτρο τότε θα περιείχε ένα υποσύνολο Y_n με μη μηδενικό πεπερασμένο μέτρο (αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο). Τότε, ονομάζοντας ξ_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του Y_n έχουμε $\xi_n \in L^2(X,\mu)$ και

$$|(f\xi_n)(x)| \ge \left(\|M_f\| + \frac{1}{n}\right)\xi_n(x)$$

για κάθε $x \in X$ άρα

$$\left(\|M_f\| + \frac{1}{n}\right)\|\xi_n\|_2 \leq \|f\xi_n\|_2 \leq \|M_f\|\|\xi_n\|_2$$

άτοπο.

Παρατηρούμε ότι $M_f = M_{f'}$ αν και μόνον αν $f = f'$ μ-σχεδόν παντού. Επομένως ο τελεστής M_f εξαρτάται μόνον από την κλάση της f ως προς ισότητα μ-σχεδόν παντού. Δείξαμε δηλαδή ότι

Λήμμα 6.1.2 *Κάθε $f \in L^\infty(X, \mu)$ ορίζει έναν φραγμένο τελεστή*

$$M_f : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu) : \ g \to fg$$

και ισχύει η ισότητα

$$\|M_f\| = \|f\|_\infty .$$

Αντίστροφα αν μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ορίζει φραγμένο πολλαπλασιαστικό τελεστή στον $L^2(X, \mu)$ τότε η f είναι ουσιωδώς φραγμένη.

Παρατηρούμε ότι ένας διαγώνιος τελεστής (Παράδειγμα 2.1.8) είναι πολλαπλασιαστικός (στον χώρο $L^2(X, \mu) = \ell^2$ όπου $X = \mathbb{N}$ και $\mu(A) = \#A$, ο πληθάριθμος ενός συνόλου A).

Θα εξετάσουμε το φάσμα ενός πολλαπλασιαστικού τελεστή M_f.

Συμβολίζουμε

$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu)) : f \in L^\infty(X, \mu)\}$$

την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του χώρου (X, μ). Ελέγχεται άμεσα ότι η απεικόνιση

$$f \to M_f : \ L^\infty(X, \mu) \to \mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$$

είναι μορφισμός αλγεβρών που διατηρεί την ενέλιξη και τη μονάδα, δηλαδή

$$M_{f+g} = M_f + M_g, \quad M_{fg} = M_f M_g, \quad M_f^* = M_{\bar{f}}, \quad M_{\mathbf{1}} = I.$$

Συνεπώς, αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X, \mu)$, τότε ο M_f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο[1] της άλγεβρας $\mathcal{M}_\mu$, άρα και της $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$.

[1] Αν $fg = \mathbf{1}$ τότε $M_f M_g = M_g M_f = M_{fg} = M_{\mathbf{1}} = I$.

Αν αντίστροφα ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος, είναι αλήθεια ότι ο αντίστροφός του, έστω T, είναι και αυτός πολλαπλασιαστικός τελεστής; Η απάντηση είναι θετική. Πράγματι, παρατήρησε κατ' αρχήν ότι η f είναι μ-σχεδόν παντού διάφορη του μηδενός. Γιατί αν υπήρχε $Y \subseteq X$ θετικού μέτρου ώστε $f|_Y = 0$, τότε, θεωρώντας την χαρακτηριστική συνάρτηση χ ενός υποσυνόλου του Y με πεπερασμένο μη μηδενικό μέτρο, θα είχαμε $\chi \in L^2(X, \mu)$, $\chi \neq 0$ και $M_f \chi = f\chi = 0$, πράγμα που αποκλείεται, αφού ο M_f είναι 1-1. Επομένως η συνάρτηση $g = 1/f$ ορίζεται μ-σχεδόν παντού και είναι βεβαίως μετρήσιμη. Ισχυρίζομαι ότι είναι ουσιωδώς φραγμένη. Πράγματι, η σχέση $M_f Th = h$ για κάθε $h \in L^2(X, \mu)$ δίνει $Th = \frac{1}{f}h = gh$. Επομένως η απεικόνιση $h \to gh$ ορίζει φραγμένο τελεστή του $L^2(X, \mu)$ πράγμα που σημαίνει (όπως είδαμε στο Λήμμα 6.1.2) ότι η g είναι ουσιωδώς φραγμένη. Συμπέρασμα:

Πρόταση 6.1.3 *Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X, \mu)$, αν δηλαδή η $\frac{1}{f}$ (ορίζεται μ-σχεδόν παντού και) είναι ουσιωδώς φραγμένη. Ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι ο $M_g \in \mathcal{M}_\mu$, όπου $g = \frac{1}{f}$.*

Αντικαθιστώντας την f με την συνάρτηση $f - \lambda$, συμπεραίνουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός λ ικανοποιεί $\lambda \notin \sigma(M_f)$ αν και μόνον αν η $\dfrac{1}{f - \lambda}$ ορίζεται (μ-σχεδόν παντού) και είναι ουσιωδώς φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\dfrac{1}{|f - \lambda|} \leq M$ μ-σχεδόν παντού, δηλαδή το σύνολο $\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \frac{1}{M}\}$ έχει μέτρο μηδέν. Γράφοντας δ αντί για $\frac{1}{M}$, έχουμε ισοδύναμα

$$\lambda \notin \sigma(M_f) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \delta > 0 \, : \, \mu(\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \delta\}) = 0.$$

Επομένως δείξαμε ότι

Πρόταση 6.1.4 *Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, το φάσμα του τελεστή M_f είναι το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \delta\}$ να έχει θετικό μέτρο. Το σύνολο αυτό το ονομάζεται* ουσιώδες σύνολο τιμών (essential range) *της f.*

6.1.1 Το φάσμα σε άλγεβρες Banach

Ορισμός 6.1.2 *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (βλ. Πρόταση 2.2.3) με μονάδα I. Ένα στοιχείο $A \in \mathcal{A}$ λέγεται* ***αντιστρέψιμο (invertible)*** *αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $AB = BA = I$. Το σύνολο των αντιστρεψίμων στοιχείων της $\mathcal{A}$ συμβολίζεται $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ ή $\mathcal{A}^{-1}$. Το* ***φάσμα (spectrum)*** *ενός στοιχείου $A \in \mathcal{A}$ είναι το σύνολο*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

Αποδεικνύεται (δες π.χ. [1], Θεώρημα VII.3.6) ότι

> *Το φάσμα $\sigma(A)$ ενός στοιχείου A μιας άλγεβρας Banach με μονάδα είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

Θα δείξουμε μόνον ότι το $\sigma(A)$ είναι συμπαγές.

Θεώρημα 6.1.5 *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα I. Κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\|I - A\| < 1$ είναι αντιστρέψιμο και μάλιστα*

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n.$$

Η **απόδειξη** είναι ακριβώς η ίδια με την απόδειξη του Λήμματος 5.2.2 (που αφορούσε την ειδική περίπτωση $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E)$).

Πόρισμα 6.1.6 *Το σύνολο $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ των αντιστρεψίμων στοιχείων της $\mathcal{A}$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη Έστω $A_o \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ και $m = \left\|A_o^{-1}\right\|$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\|A - A_o\| < \frac{1}{m}$ έχουμε

$$\left\|A_0^{-1}A - I\right\| = \left\|A_0^{-1}(A - A_o)\right\| \leq \|A_0^{-1}\| \, \|A - A_o\| < 1$$

άρα $A_0^{-1}A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, συνεπώς και $A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. □

Πόρισμα 6.1.7 *Αν $A \in \mathcal{A}$, το σύνολο $\sigma(A)$ είναι φραγμένο. Μάλιστα, αν*

$$\rho(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

είναι η ***φασματική ακτίνα (spectral radius)*** *του A, τότε $\rho(A) \leq \|A\|$.*

Απόδειξη Αν $|\lambda| > \|A\|$, τότε $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1$ οπότε από το Θεώρημα προκύπτει ότι $I - \frac{A}{\lambda} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ άρα $\lambda I - A \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. $\square$

Πόρισμα 6.1.8 *Αν $A \in \mathcal{A}$, το σύνολο $\sigma(A)$ είναι κλειστό (άρα συμπαγές, αφού είναι και φραγμένο).*

Απόδειξη Δείχνουμε ότι το $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ είναι ανοικτό. Πράγματι, το $\mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ είναι η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ μέσω της απεικόνισης $F_A : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ με $F_A(\lambda) = A - \lambda I$, που είναι συνεχής. $\square$

6.1.2 Το φάσμα ενός τελεστή

Αν $\mathcal{X}$ είναι χώρος *Banach*, ένα στοιχείο T της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν είναι 1-1 και επί (γιατί ο αντίστροφός του είναι αυτομάτως φραγμένος από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης (7.3.12)).

Παρατήρηση 6.1.9 *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι κάτω φραγμένος (δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$) και έχει πυκνό σύνολο τιμών.*

Απόδειξη Είναι σαφές ότι ένας αντιστρέψιμος τελεστής ικανοποιεί τις δύο αυτές συνθήκες (με $\delta = \|T^{-1}\|^{-1}$).

Αντίστροφα, αν $\mathcal{Y} = T(\mathcal{X})$, η ανισότητα $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ δείχνει ότι η απεικόνιση $S_o : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : Tx \to x$ είναι καλά ορισμένη (γιατί ο T είναι 1-1) και φραγμένη (από $\frac{1}{\delta}$). Προφανώς η S_o είναι γραμμική. Συνεπώς, ο S_o επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $S : \overline{\mathcal{Y}} \to \mathcal{X}$ με $STx = x$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και $TSy = y$ για κάθε $y \in \overline{\mathcal{Y}}$ (γιατί;). Επομένως, αν $\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}$, τότε ο T είναι αντιστρέψιμος και $S = T^{-1}$. $\square$

Από την Παρατήρηση αυτή προκύπτει ότι το φάσμα ενός τελεστή A μπορεί να αναλυθεί σε περισσότερα κομμάτια (που δεν έχουν έννοια για ένα στοιχείο μιας αυθαίρετης άλγεβρας Banach): Αν $\lambda \in \sigma(A)$, μπορεί ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος (ειδικότερα, να μην είναι 1-1) ή να μην έχει πυκνό σύνολο τιμών (ή και τα δύο). Αυτό οδηγεί στους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 6.1.3 *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Το **σημειακό φάσμα (point spectrum)** $\sigma_p(A)$ του A είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του:*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

*Το **προσεγγιστικά σημειακό φάσμα (approximate point spectrum)** $\sigma_a(A)$ του A είναι το σύνολο των **προσεγγιστικών ιδιοτιμών (approximate eigenvalues)**, δηλαδή το σύνολο των λ ώστε ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος:*

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in \mathcal{X} \ : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

*Το **φάσμα συμπίεσης (compression spectrum)** $\sigma_c(A)$ του A είναι το σύνολο*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(\mathcal{X})} \neq \mathcal{X}\}.$$

Ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq \mathcal{X}$ με $\|x_n\| = 1$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$.

Τα σύνολα $\sigma_a(A)$ και $\sigma_c(A)$ δεν είναι ξένα εν γένει. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι ίσα και ταυτίζονται με το (σημειακό) φάσμα. Σε απειροδιάστατους χώρους μπορεί να μην ταυτίζονται.[2] Πάντοτε όμως, όπως προκύπτει από την παρατήρηση 6.1.9,

Πρόταση 6.1.10 *Η ένωση $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$ ισούται με $\sigma(A)$.*

Το φάσμα συμπίεσης είναι κατά κάποιον τρόπο δυϊκό προς το σημειακό φάσμα. Αυτό φαίνεται πιο εύκολα σε χώρους Hilbert. Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 6.1.11 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^\perp \qquad \textit{και} \qquad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^\perp.$$

Επομένως ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του T^* είναι πυκνό.

[2] Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στο 6.1.13, για τον τελεστή της μετατόπισης S, το $\sigma_a(S)$ είναι η μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T}$, ενώ το $\sigma_c(S)$ είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος $\mathbb{D}$, οπότε $\sigma_c(S) \cap \sigma_a(S) = \emptyset$.

Απόδειξη Άσκηση 2.28.

Λήμμα 6.1.12 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*

(i) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$

(ii) $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$ *και* $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$.

Απόδειξη Οι σχέσεις $AB = I = BA$ και $B^*A^* = I = A^*B^*$ είναι ισοδύναμες. Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A^* είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Η (i) έπεται θέτοντας $A = T - \lambda I$.

Για την (ii), εφαρμόζουμε το προηγούμενο Λήμμα: έχουμε $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ αν και μόνον αν το $(T^* - \bar{\lambda} I)(\mathcal{H})$ δεν είναι πυκνό. □

Παράδειγμα 6.1.13 *Αν $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ είναι ο τελεστής της μετατόπισης $Se_n = e_{n+1}$ (Παράδειγμα 2.1.10), τότε*

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \mathbb{T}, \quad \sigma_c(S) = \mathbb{D} \text{ και άρα } \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$$

(όπου $\mathbb{D}$ ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος και $\mathbb{T}$ η μοναδιαία περιφέρεια).

Απόδειξη **(i)** Η σχέση $\|Sx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \ell^2$ δείχνει ότι $\|S\| = 1$, άρα $\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ (Πόρισμα 6.1.7).

(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x = (x_n) \in \ell^2$ ώστε $Sx = \lambda x$, δηλαδή

$$(0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Αν $\lambda = 0$ τότε η σχέση αυτή δείχνει ότι $x = 0$. Αν $\lambda \neq 0$ τότε από την σχέση $\lambda x_1 = 0$ έχουμε $x_1 = 0$, από την σχέση $\lambda x_2 = x_1$ έχουμε $x_2 = 0$ και ούτω καθεξής, άρα πάλι $x = 0$. Επομένως $\sigma_p(S) = \emptyset$.

(iii) Ισχυρίζομαι ότι $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$. Τότε (από το Λήμμα 6.1.12) θα έχουμε $\sigma_c(S) = \mathbb{D}$, οπότε $\mathbb{D} \subseteq \sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, άρα $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ εφόσον το $\sigma(S)$ είναι κλειστό.

Πράγματι, έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x = (x_n) \in \ell^2, x \neq 0$ τέτοιο ώστε $S^*x = \lambda x$, δηλαδή

$$(x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Τότε $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1$ και γενικά $x_{n+1} = \lambda^n x_1$. Επειδή $x \in \ell^2$, έπεται ότι $\sum_n |\lambda|^{2n} < \infty$ (διότι $x_1 \neq 0$ αφού $x \neq 0$) άρα $|\lambda| < 1$.

Αντίστροφα αν $\lambda \in \mathbb{D}$ τότε το διάνυσμα $x = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ είναι μη μηδενικό στοιχείο του ℓ^2 και ικανοποιεί $S^* x = \lambda x$, άρα $\lambda \in \sigma_p(S^*)$.

(iv) Εφόσον $\sigma_a(S) \subseteq \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$, για να δείξουμε ότι $\sigma_a(S) = \mathbb{T}$, μένει να δειχθεί ότι αν $\lambda \in \mathbb{D}$ τότε $\lambda \notin \sigma_a(S)$, δηλαδή ότι ο $S - \lambda I$ είναι κάτω φραγμένος. Πράγματι για κάθε $x \in \ell^2$ έχουμε

$$\|(S - \lambda I)x\| \geq \left|\|Sx\| - \|\lambda x\|\right| = \left|\|x\| - \|\lambda x\|\right| = (1 - |\lambda|)\,\|x\|\,.$$

Παράδειγμα 6.1.14 *Ορίζουμε την απεικόνιση $T : c_{oo} \to c_{oo}$ (βλ. Παράδειγμα 1.1 (iii)) από την σχέση $Te_n = \frac{1}{n}e_{n+1}$ (και επεκτείνουμε γραμμικά). Ελέγχεται εύκολα ότι ο $\|Tx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{oo}$, άρα ο T επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από τον ℓ^2 στον εαυτό του (που συμβολίζουμε επίσης με T). Σημείωσε ότι $T = SD$ όπου S είναι ο τελεστής της μετατόπισης και $De_n = \frac{1}{n}e_n$.*

Τότε $\sigma(T) = \{0\}$. Μάλιστα $\sigma_p(T) = \emptyset$ και $\sigma_a(T) = \sigma_c(T) = \{0\}$.

Εφόσον $\sigma(D) = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ και $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$, το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το σ δεν συμπεριφέρεται καλά ως προς την σύνθεση τελεστών.

Απόδειξη (i) Κατ' αρχήν ισχύει ότι $0 \in \sigma_a(T)$ γιατί $\|(T-0)e_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. Όμως $0 \notin \sigma_p(T)$ διότι οι S και D είναι 1-1, άρα και ο $T = SD$ είναι 1-1. Επίσης $0 \in \sigma_c(T)$ διότι $\langle Te_n, e_1\rangle = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\langle Tx, e_1\rangle = 0$ για κάθε $x \in \ell^2$, άρα $e_1 \perp (T-0)(\ell^2)$.

(ii) Έστω $\lambda \neq 0$. Θα δείξουμε ότι ο $T_\lambda = \lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε θα έχουμε $\sigma(T) = \{0\}$ και $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Παρατηρούμε ότι $\|T^k\| \leq \dfrac{1}{k!}$ γιατί

$$T^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(n+1)\ldots(n+k-1)} e_{n+k}$$

άρα

$$\left\|T^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right)\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{(n(n+1)\ldots(n+k-1))^2} \leq \frac{1}{(k!)^2}\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\,.$$

Επομένως $\left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\right\| \leq \frac{1}{k!|\lambda|^k}$, άρα

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{|\lambda|^k} = \exp\frac{1}{|\lambda|}$$

πράγμα που δείχνει ότι αν $S_n = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}(\frac{T}{\lambda})^k$ τότε η (S_n) συγκλίνει ως προς τη νόρμα τελεστή. Έστω $S_\lambda = \lim_n S_n$. Εφόσον

$$T_\lambda S_n = S_n T_\lambda = \left(I - \frac{T}{\lambda}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\right) = I - \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$$

έπεται ότι $T_\lambda S_\lambda = S_\lambda T_\lambda = I$. □

6.1.3 Το φάσμα αυτοσυζυγούς τελεστή

Στην Πρόταση 4.2.4 είχαμε δείξει ότι κάθε αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής A έχει το $\|A\|$ ή το $-\|A\|$ ως ιδιοτιμή. Ένας μη συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής είναι δυνατόν να μην έχει καθόλου ιδιοτιμές (ένα παράδειγμα είναι το 6.1.1). Θα δείξουμε όμως ότι έχει προσεγγιστικές ιδιοτιμές, και μάλιστα το $\|A\|$ ή το $-\|A\|$.

Πρόταση 6.1.15 *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε $\sigma(A) = \sigma_a(A)$.*

Απόδειξη Έστω $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Αρκεί να δειχθεί ότι $\lambda \notin \sigma_c(A)$, δηλαδή ότι το $(A - \lambda I)\mathcal{H}$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$. Αν $x \perp (A - \lambda I)\mathcal{H}$, τότε $(A^* - \bar{\lambda} I)x = 0$. Αλλά ο $A - \lambda I$ είναι κάτω φραγμένος, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|(A - \lambda I)x\| \geq \delta\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Επειδή ο $A - \lambda I$ είναι φυσιολογικός, από την Πρόταση 2.4.5 έχουμε $\|(A^* - \bar{\lambda} I)x\| = \|(A - \lambda I)x\| \geq \delta\|x\|$, και συνεπώς $x = 0$. Επομένως το $(A - \lambda I)\mathcal{H}$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$.

Πρόταση 6.1.16 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Αν $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, τότε, για κάθε $x \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}0 < |\lambda - \bar{\lambda}|.\|x\|^2 &= |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle (A - \bar{\lambda} I)x, x\rangle| \\ &= |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A - \lambda I)x\rangle| \leq 2\|(A - \lambda I)x\|\|x\|\end{aligned}$$

οπότε

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq \frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{2}\|x\|.$$

Επομένως $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Αλλά $\sigma_a(A) = \sigma(A)$ διότι ο A είναι φυσιολογικός. □

Πρόταση 6.1.17 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε ένας από τους αριθμούς $\|A\|$ ή $-\|A\|$ ανήκει στο $\sigma(A)$. Ειδικότερα,*[3]

$$\text{(α)} \ \ \sigma(A) \neq \emptyset \qquad \text{και} \qquad \text{(β)} \ \ \rho(A) = \|A\|.$$

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι ο αριθμός $\|A\|^2$ ανήκει στο $\sigma(A^2)$. Τότε το γινόμενο $(A - \|A\|I)(A + \|A\|I) = (A^2 - \|A\|^2 I)$ δεν θα είναι αντιστρέψιμο, οπότε οι τελεστές $(A - \|A\|I)$ και $(A + \|A\|I)$ δεν μπορεί και οι δύο να είναι αντιστρέψιμοι.

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathcal{H}$ έχουμε (εφόσον $\langle A^2 x, \lambda^2 x\rangle \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \|A^2 x - \lambda^2 x\|^2 &= \langle A^2 x - \lambda^2 x, A^2 x - \lambda^2 x\rangle = \|A^2 x\|^2 - 2\langle A^2 x, \lambda^2 x\rangle + \|\lambda^2 x\|^2 \\ &= \|A^2 x\|^2 - 2\lambda^2 \|Ax\|^2 + \lambda^4 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Αλλά $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$, άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) με $\|x_n\| = 1$ και $\|Ax_n\| \to \|A\|$. Θέτοντας $\lambda = \|A\|$ και $x = x_n$ στην προηγούμενη ταυτότητα, έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \|A^2 x_n - \lambda^2 x_n\|^2 &= \|A^2 x_n\|^2 - 2\lambda^2 \|Ax_n\|^2 + \lambda^4 \\ &\leq (\|A\|\|Ax_n\|)^2 - 2\lambda^2 \|Ax_n\|^2 + \lambda^4 = \lambda^4 - \lambda^2 \|Ax_n\|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός $\lambda^2 = \|A\|^2$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A^2. □

6.2 Συνεχείς συναρτήσεις ενός αυτοσυζυγούς τελεστή

Σταθεροποιούμε έναν τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Για κάθε μιγαδικό πολυώνυμο p της μορφής $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).

Στόχος μας είναι να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f.

Πρόταση 6.2.1 *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και p είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

[3]Υπενθυμίζω ότι (όπως αποδεικνύεται με μεθόδους Μιγαδικής Ανάλυσης) το φάσμα οποιουδήποτε τελεστή σε ένα χώρο Banach είναι μη κενό. Η ισότητα $\rho(A) = \|A\|$ δεν ισχύει όμως εν γένει για μη φυσιολογικούς τελεστές (παράδειγμα $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$).

Απόδειξη Αν το p είναι σταθερό, ο $p(A)$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή, οπότε το συμπέρασμα αληθεύει. Υποθέτω λοιπόν ότι το p δεν είναι σταθερό.

Αν $\mu \in \mathbb{C}$, το πολυώνυμο $q(z) \equiv p(z) - \mu$ παραγοντοποιείται: $q(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$ (όπου $c \neq 0$). Τότε

$$p(A) - \mu I = c(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I).$$

Αν κάθε $A - \lambda_k I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε βέβαια το γινόμενό τους, άρα και το $p(A) - \mu I$, είναι αντιστρέψιμο. Αντίστροφα αν το $q(A) = p(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμο, επειδή οι $A - \lambda_k I$ μετατίθενται, θα είναι όλοι αντιστρέψιμοι.[4] Επομένως $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\lambda_k \in \sigma(A)$ για κάποιο $k = 1, \dots, n$. Αλλά τα λ_k είναι οι ρίζες του q, δηλαδή είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί λ που ικανοποιούν $p(\lambda) = \mu$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή αν και μόνον αν $\mu \in \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το κρίσιμο βήμα για να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα σε συναρτήσεις που είναι κατάλληλα όρια πολυωνύμων. Ας σημειώσουμε μόνο ότι (σε αντίθεση με την προηγούμενη Πρόταση) το Θεώρημα δεν ισχύει για μη φυσιολογικούς τελεστές. Αν για παράδειγμα $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ και $p(t) = t^2$, τότε $\sigma(A) = \{0, 1\}$ οπότε $\|p\|_{\sigma(A)} = 1$ ενώ $\|p(A)\| > 2$ γιατί π.χ. $\left\|p(A)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\| = \sqrt{5}$.

Θεώρημα 6.2.2 *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $A = A^*$ τότε*

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \equiv \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Απόδειξη Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το p έχει πραγματικούς συντελεστές. Τότε ο τελεστής $p(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα από την Πρόταση 6.1.17 η νόρμα του ισούται με την φασματική ακτίνα, επομένως

$$\|p(A)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(A))\}.$$

[4]Το $q(A)$ μπορεί να γραφεί $q(A) = (A - \lambda_k I)B = B(A - \lambda_k I)$. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(A))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι το $A - \lambda_k I$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμο.

Αλλά $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ από την Πρόταση 6.2.1, και η ζητούμενη ισότητα έπεται.

Για την γενική περίπτωση, παρατήρησε ότι αν $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, τότε

$$p(A)^* p(A) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)^* \left(\sum_{r=0}^{n} a_r A^r\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k A^k\right)\left(\sum_{r=0}^{n} a_r A^r\right) = q(A)$$

(εφόσον $A = A^*$) όπου q είναι το πολυώνυμο $q(t) = \bar{p}(t)p(t)$ που έχει πραγματικούς συντελεστές. Από την προηγούμενη παράγραφο λοιπόν έχουμε

$$\|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Όμως $\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\| = \|q(A)\|$ από την ιδιότητα C^* και επομένως

$$\begin{aligned}\|p(A)\|^2 &= \|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \sup\{|\bar{p}(\lambda)p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = (\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\})^2.\end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θα επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε ότι η υπάλγεβρα $\mathcal{P}(\sigma(A)) \subseteq C(\sigma(A))$ των *πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* $\sigma(A)$ είναι πυκνή στην άλγεβρα $C(\sigma(A))$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων στο $\sigma(A)$ ως προς την νόρμα supremum. Αυτό έπεται είτε απευθείας από το Θεώρημα Stone-Weierstrass (7.3.15), είτε από το βασικό Θεώρημα Weierstrass (7.3.14), αν παρατηρήσει κανείς ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$, επεκτείνεται με την ίδια νόρμα σε μιά συνεχή συνάρτηση ορισμένη π.χ. στο $[-\|A\|, \|A\|]$, η οποία προσεγγίζεται από πολυώνυμα ομοιόμορφα στο $[-\|A\|, \|A\|]$, άρα και στο $\sigma(A)$.

Θεώρημα 6.2.3 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))
*Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, υπάρχει μοναδικός συνεχής αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|) : f \to f(A)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στον τελεστή A.

Επιπλέον, ο Φ_c είναι ισομετρία και ικανοποιεί $\Phi_c(p) = p(A)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Απόδειξη *Ύπαρξη:* Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(A)$, τότε $p(A) = q(A)$ (πράγματι, $\|p(A)-q(A)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = 0$). Επομένως το $p(A)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(A)$. Δηλαδή η απεικόνιση

$$\Phi_o : (\mathcal{P}(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|) : \quad p \to p(A)$$

είναι καλά ορισμένη. Είναι φανερό ότι είναι μορφισμός αλγεβρών:

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A) \quad \text{και} \quad (pq)(A) = p(A)q(A)$$

όταν τα p και q είναι πολυώνυμα, και ότι διατηρεί την ενέλιξη:
Αν $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, τότε

$$(p(A))^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k A^k = \overline{p}(A)$$

(αφού $A = A^*$). Αλλά από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι η Φ_o είναι επίσης ισομετρία χώρων με νόρμα. Εφόσον η $\mathcal{P}(\sigma(A))$ είναι πυκνή στην $C(\sigma(A))$, έπεται ότι η Φ_o έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Μοναδικότητα: Αν Ψ είναι ένας συνεχής *-μορφισμός $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που ταυτίζεται με τον Φ_c στα p_0 και p_1 τότε, αφού και οι δύο είναι μορφισμοί, θα ταυτίζονται σε δυνάμεις και γραμμικούς συνδυασμούς, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο. Εφόσον οι Φ_c και Ψ είναι συνεχείς, θα ταυτίζονται και στα (ομοιόμορφα) όρια πολυωνύμων, δηλαδή σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. □

Ορισμός 6.2.1 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ο **συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus)** είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για $\Phi_c(f)$.*

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(A) = \lim p_n(A) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0.$$

Παρατηρήσεις 6.2.4 **(i)** Ο ορισμός του συναρτησιακού λογισμού για συνεχείς συναρτήσεις Φ_c είναι αλγεβρο-τοπολογικός και στηρίζεται στο Θεώρημα 6.2.2. Επομένως ο Φ_c δεν ορίζεται για οποιονδήποτε τελεστή A.

Παραδείγματος χάριν, αν $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, τότε $\sigma(A) = \{0\}$ (ο A είναι μηδενοδύναμος) αλλά, παρόλο που η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, δεν ορίζεται τελεστής $f(A)$. Μάλιστα, δεν υπάρχει τελεστής B ώστε $B^2 = A$ (απόδειξη: άσκηση!).

Αποδεικνύεται ότι ο συναρτησιακός λογισμός ορίζεται και όταν ο A είναι φυσιολογικός τελεστής. Δες π.χ. [1, VIII.2] ή [7].

(ii) Αν K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff (π.χ. συμπαγής μετρικός χώρος), κάθε αλγεβρικός *-μορφισμός $\Phi : C(K) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτομάτως συνεχής.
[*Απόδειξη* Πρώτα παρατηρούμε ότι αν $f \geq 0$ τότε $\Phi(f) \geq 0$. Πράγματι, αν $g = \sqrt{f}$ έχουμε $\Phi(f) = \Phi(g^*g) = (\Phi(g))^*\Phi(g) \geq 0$.
Επομένως, για κάθε $f \in C(K)$, η σχέση $f^*f \leq \|f\|^2$ δηλαδή $\|f\|^2 p_o - f^*f \geq 0$ (όπου $p_o(t) = 1$) δείχνει ότι $\Phi(\|f\|^2 p_o - f^*f) \geq 0$, δηλαδή $\Phi(f^*f) \leq \Phi(\|f\|^2 p_o) = \|f\|^2 I$, άρα $0 \leq \Phi(f^*f) \leq \|f\|^2 I$ και συνεπώς $\|\Phi(f)\|^2 = \|\Phi(f)^*\Phi(f)\| \leq \|f\|^2$.]

Επομένως, ο Φ_c είναι ο μοναδικός *-μορφισμός $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που στέλνει την μονάδα στον I και το ταυτοτικό πολυώνυμο στον A.

(iii) Έχουμε ήδη συναντήσει τον συναρτησιακό λογισμό, στην ειδική περίπτωση που ο A είναι συμπαγής (Άσκηση 4.7).

Είναι φανερό ότι για κάθε πολυώνυμο p ο τελεστής $p(A)$ μετατίθεται με τον A. Το ίδιο επομένως ισχύει και για τον $f(A)$, αν $f \in C(\sigma(A))$.

Πιο ενδιαφέρον όμως, όπως θα δούμε, είναι το γεγονός ότι *ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.* Πράγματι, αν $AT = TA$ τότε $A^2T = ATA = TA^2$ και επαγωγικά $A^nT = TA^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $p(A)T = Tp(A)$ για κάθε πολυώνυμο p, άρα και $f(A)T = Tf(A)$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, λόγω συνέχειας. Δείξαμε λοιπόν ότι

Παρατήρηση 6.2.5 *Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Δηλαδή ο συναρτησιακός λογισμός παίρνει τιμές στον δεύτερο μεταθέτη $\{A\}''$ του A, όπου*

*Ο **μεταθέτης (commutant)** $\mathcal{S}'$ ενός υποσυνόλου $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι το σύνολο των τελεστών που μετατίθενται με κάθε στοιχείο του $\mathcal{S}$:*

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS = ST \text{ για κάθε } S \in \mathcal{S}\}.$$

Θεώρημα 6.2.6 (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης) *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής και $f \in C(\sigma(A))$,*

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη Αν $\mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ τότε η συνάρτηση $g(\lambda) = f(\lambda) - \mu$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\sigma(A)$, άρα υπάρχει $h \in C(\sigma(A))$ ώστε $hg = \mathbf{1}$ (μάλιστα $h(t) = (f(t) - \mu)^{-1}$). Τότε όμως $\Phi_c(h)\Phi_c(g) = \Phi_c(hg) = I$ και $\Phi_c(g)\Phi_c(h) = \Phi_c(gh) = I$, δηλαδή $h(A)g(A) = I = g(A)h(A)$, άρα ο $f(A) - \mu I$ έχει αντίστροφο, τον $h(A)$. Συνεπώς $\mu \notin \sigma(f(A))$.

[Παρατήρησε ότι αυτό το μέρος της απόδειξης είναι καθαρά αλγεβρικό: εξαρτάται μόνον από το γεγονός ότι η απεικόνιση $f \to f(A)$ είναι μορφισμός αλγεβρών που διατηρεί την μονάδα, άρα απεικονίζει αντιστρέψιμα στοιχεία σε αντιστρέψιμα στοιχεία.]

Έστω τώρα $\mu \in \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$, οπότε $\mu = f(\lambda_o)$ για κάποιο $\lambda_o \in \sigma(A)$. Θα δείξω ότι ο τελεστής $f(A) - \mu I$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ισχυρίζομαι ότι

$$f(A) - \mu I = \lim_n q_n(A),$$

όπου (q_n) ακολουθία πολυωνύμων με $q_n(\lambda_o) = 0$ για κάθε n. Πράγματι, υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n(t) \to f(t) - \mu = g(t)$ ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$, άρα και $p_n(\lambda_o) \to g(\lambda_o) = 0$. Αν θέσουμε $q_n(t) = p_n(t) - p_n(\lambda_o)$, έχουμε $q_n(\lambda_o) = 0$ και $\|q_n - g\|_{\sigma(A)} \to 0$, άρα $q_n(A) \to g(A) = f(A) - \mu I$ (Θεώρημα 6.2.2) και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Εφόσον $\lambda_o \in \sigma(A)$, έπεται ότι $0 = q_n(\lambda_o) \in q_n(\sigma(A))$. Αλλά $q_n(\sigma(A)) = \sigma(q_n(A))$ από την Πρόταση 6.2.1, άρα οι τελεστές $q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμοι. Εφόσον το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ανοικτό (Πόρισμα 6.1.6), έπεται ότι ο $f(A) - \mu I = \lim q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. □

Πόρισμα 6.2.7 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο τελεστής $f(A)$ είναι φυσιολογικός. Ο $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma(A)$. Επίσης, $f(A) \geq 0$ αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη Εφόσον ο συναρτησιακός λογισμός Φ_c διατηρεί την ενέλιξη (Θεώρημα 6.2.3), για κάθε f ισχύει $(\Phi_c(f))^* = \Phi_c(\bar{f})$ δηλαδή $(f(A))^* = \bar{f}(A)$. Επομένως κάθε $f(A)$ είναι φυσιολογικός. Επίσης η ισότητα $f(A) = f(A)^*$ ισχύει αν και μόνον αν η f είναι πραγματική συνάρτηση. Αν η f είναι μη αρνητική στο $\sigma(A)$ τότε θέτοντας $g(t) = \sqrt{f(t)}$ $(t \in \sigma(A))$ έχουμε $g(A)^* = g(A)$ άρα $f(A) = g(A)^*g(A) \geq 0$. Αντίστροφα αν $f(A) \geq 0$ τότε $\sigma(f(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και συνεπώς $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ (Θεώρημα 6.2.6). □

Πόρισμα 6.2.8 ***(i)*** *Κάθε αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών $A = A_+ - A_-$ με $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. Επομένως κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.*

(ii) [Πρόταση 2.4.12] *Κάθε θετικός τελεστής A έχει θετική τετραγωνική ρίζα.*

Απόδειξη Για το (i), θέτουμε $A_+ = f_+(A)$ και $A_- = f_-(A)$ όπου $f_+(t) = \max\{t, 0\}$ και $f_-(t) = -\min\{t, 0\}$ $(t \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R})$.

Για το (ii), αν $A \geq 0$, οπότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, θεωρούμε τον τελεστή $g(A)$ όπου $g(t) = \sqrt{t},\ t \geq 0$.

6.3 Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Σταθεροποιούμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και στοχεύουμε να «αναπαραστήσουμε» τον A ως πολλαπλασιαστικό τελεστή σ' έναν κατάλληλο χώρο $L^2(X, \mu)$. Ακριβέστερα, θα κατασκευάσουμε ένα χώρο μέτρου (X, μ) και μια $f \in L^\infty(X, \mu)$ ώστε ο A να είναι *ορθομοναδιαία ισοδύναμος* με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f, δηλαδή να υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to \mathcal{H}$ ώστε $A = UM_fU^{-1}$.

Το κρίσιμο βήμα εμπεριέχεται στο

Λήμμα 6.3.1 *Για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to \mathcal{H}$ ώστε*

$$U_x M_f = f(A) U_x \quad \text{για κάθε} \quad f \in C(\sigma(A))$$

(και ειδικότερα $AU_x = U_x M_{f_o}$ όπου $f_o(\lambda) = \lambda$).

Απόδειξη Από τον συναρτησιακό λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις (Θεώρημα 6.2.3), ορίζεται η απεικόνιση

$$\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) : f \to f(A)$$

που είναι ισομετρικός *-μορφισμός.

Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\sigma(A)) \to \mathbb{C} : f \to \langle f(A)x, x \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι *θετική* γραμμική μορφή στον $C(\sigma(A))$, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Πράγματι, αν $f \geq 0$ τότε $f(A) \geq 0$ (Πόρισμα 6.2.7) επομένως $\phi_x(f) = \langle f(A)x, x \rangle \geq 0$.

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz (βλέπε π.χ. [9, Θεώρημα 12.26]), υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle f(A)x, x \rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\sigma(A)).$$

Θεωρώντας τώρα τον χώρο $C(\sigma(A))$ ως υπόχωρο του $L^2(\sigma(A), \mu_x)$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$U_{ox} : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_2) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) : f \to f(A)x$$

που είναι προφανώς γραμμική. Ισχυρίζομαι ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$\begin{aligned} \|f(A)x\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle f(A)x, f(A)x \rangle = \langle f(A)^* f(A)x, x \rangle = \langle (\bar{f}f)(A)x, x \rangle \\ &= \int \bar{f} f d\mu_x = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\Phi_c : f \to f(A)$ είναι *-μορφισμός). Δείξαμε λοιπόν ότι $\|U_{ox}(f)\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_2$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, δηλαδή ότι η U_{ox} είναι ισομετρική. Επομένως επεκτείνεται σε ισομετρία U_x ορισμένη στην κλειστή θήκη του $C(\sigma(A))$ ως προς την νόρμα $\|.\|_2$. Αλλά αυτή η κλειστή θήκη είναι ακριβώς[5] ο $L^2(\sigma(A), \mu_x)$. Έχουμε λοιπόν μια ισομετρία

$$U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to \mathcal{H}$$

που ικανοποιεί $U_x(f) = f(A)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Μένει να δειχθεί ότι $U_x M_f = f(A)U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$.

Πράγματι, για κάθε $g \in C(\sigma(A))$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = ((fg)(A))(x) = f(A)(g(A)(x)) = (f(A)U_x)(g).$$

Επομένως οι *φραγμένοι* τελεστές $U_x M_f$ και $f(A)U_x$ ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $C(\sigma(A))$ του $L^2(\sigma(A), \mu_x)$, άρα είναι ίσοι. □

Παρατηρήσεις 6.3.2 **(i)** Αξίζει ίσως να σχολιάσει κανείς τον *διπλό ρόλο του χώρου* $C(\sigma(A))$ στην προηγούμενη απόδειξη: Αφενός μεν χρησιμοποιήθηκε (μέσω του συναρτησιακού λογισμού) ως χώρος τελεστών $f(A)$ στον $\mathcal{H}$, αφετέρου ως χώρος διανυσμάτων στον $L^2(\sigma(A), \mu_x)$.

(ii) Το σύνολο τιμών $\mathrm{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο **κυκλικός υπόχωρος**

$$\mathcal{H}_x = \overline{[A^n x : n = 0, 1, \ldots]} = \overline{[x, Ax, A^2x, \ldots]}$$

του x για τον A.

Πράγματι, το σύνολο τιμών του U_x είναι κλειστό (διότι ο U_x είναι ισομετρία) και περιέχει το $f(A)x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$. Ειδικότερα περιέχει όλα τα διανύσματα της μορφής $A^n x$ για $n = 0, 1, \ldots$, άρα περιέχει τον $\mathcal{H}_x$. Από την άλλη μεριά κάθε $f \in C(\sigma(A))$ προσεγγίζεται από μια ακολουθία (p_n) από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$, και συνεπώς $\|p_n(A) - f(A)\| \to 0$, άρα και

[5] βλέπε π.χ. [9, Πρόταση 12.24].

$\|p_n(A)x - f(A)x\| \to 0$. Αλλά κάθε $p_n(A)x$ ανήκει στον $\mathcal{H}_x$, συνεπώς το ίδιο ισχύει για το $f(A)x$. Επομένως

$$\operatorname{im} U_{ox} = \{f(A)x : f \in C(\sigma(A))\} \subseteq \mathcal{H}_x \subseteq \operatorname{im} U_x$$
$$\text{άρα} \qquad \operatorname{im} U_x = \overline{\operatorname{im} U_{ox}} \subseteq \mathcal{H}_x \subseteq \operatorname{im} U_x$$

και συνεπώς ισχύει ισότητα.

(iii) Αν μπορούσαμε να επιλέξουμε το $x \in \mathcal{H}$ ώστε ο U_x να είναι αντιστρέψιμος, τότε το προηγούμενο Λήμμα θα έδινε $f(A) = U_x M_f U_x^{-1}$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, και ειδικότερα $A = U_x M_{f_o} U_x^{-1}$, οπότε θα είχαμε δείξει ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή.

Αλλά ο U_x είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι επί του $\mathcal{H}$ (γιατί είναι πάντα ισομετρία, άρα 1-1). Από την προηγούμενη παρατήρηση, αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν ο κυκλικός υπόχωρος $\mathcal{H}_x$ είναι όλος ο χώρος $\mathcal{H}$.

Ορισμός 6.3.1 *Ένα διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ λέγεται **κυκλικό (cyclic)** για τον τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αν ο κυκλικός υπόχωρος (cyclic subspace) που ορίζει είναι όλος ο $\mathcal{H}$, ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $[A^n x : n = 0, 1, \ldots]$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$.*

Το Λήμμα και οι παρατηρήσεις που προηγήθηκαν αποδεικνύουν την

Πρόταση 6.3.3 *Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει πεπερασμένο θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_{f_o} του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_{f_o}(g))(x) = xg(x)$, στον $L^2(\sigma(A), \mu)$.*

Όμως, δεν έχουν όλοι οι αυτοσυζυγείς τελεστές κυκλικά διανύσματα. Παραδείγματος χάριν, ο ταυτοτικός τελεστής του $\mathcal{H}$ δεν έχει ποτέ κυκλικό διάνυσμα, εκτός αν ο $\mathcal{H}$ είναι μονοδιάστατος! Ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα είναι το εξής:

Παράδειγμα 6.3.4 *Έστω $\mathcal{H} = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ [6] και έστω $A = M_{f_o} \oplus M_{f_o}$ όπου $f_o(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in [0,1]$). Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.*

[6] με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle$

Απόδειξη Ότι ο A είναι αυτοσυζυγής έπεται από το γεγονός ότι η f_o είναι πραγματική. Ισχυρίζομαι ότι κανένα διάνυσμα $f \oplus g$ δεν είναι κυκλικό για τον A. Πράγματι, το διάνυσμα $\bar{g} \oplus (-\bar{f})$ είναι κάθετο σε κάθε $A^n(f \oplus g)$:

$$\begin{aligned}\left\langle A^n(f \oplus g), \bar{g} \oplus (-\bar{f}) \right\rangle &= \left\langle (M_{f_o}^n f \oplus M_{f_o}^n g), \bar{g} \oplus (-\bar{f}) \right\rangle = \left\langle M_{f_o}^n f, \bar{g} \right\rangle - \left\langle M_{f_o}^n g, \bar{f} \right\rangle \\ &= \int t^n f(t) g(t) dt - \int t^n g(t) f(t) dt = 0.\end{aligned}$$

Έπεται ότι η γραμμική θήκη του συνόλου $\{A^n(f \oplus g) : n = 0, 1, \ldots\}$ δεν μπορεί να είναι πυκνή στον $\mathcal{H}$.

Παρατήρησε ότι αν ταυτίσουμε τον χώρο $\mathcal{H}$ στο παράδειγμα αυτό με τον $L^2([0,1] \cup [1,2])$, τότε ο τελεστής A ταυτίζεται με τον M_f, όπου $f(t) = t$ για $t \in [0,1]$ και $f(t) = t - 1$ για $t \in (1,2]$.

Με κάπως ανάλογο τρόπο, η γενική περίπτωση ανάγεται στην περίπτωση της Πρότασης 6.3.3 τοποθετώντας κατάλληλους χώρους μέτρου «τον ένα δίπλα στον άλλο».

Λήμμα 6.3.5 *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μια οικογένεια $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ από κάθετους ανά δύο υποχώρους του $\mathcal{H}$, ώστε*

(ι) κάθε $\mathcal{H}_i$ να είναι A-αναλλοίωτος, δηλ. $A(\mathcal{H}_i) \subseteq \mathcal{H}_i$

(ιι) κάθε $\mathcal{H}_i$ να είναι A-κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα A-κυκλικό διάνυσμα

(ιιι) το ευθύ άθροισμα $\oplus_i \mathcal{H}_i$ (δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ που περιέχει κάθε $\mathcal{H}_i$) να είναι όλος ο $\mathcal{H}$.

Απόδειξη Ονομάζουμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ **πολύ κάθετα** (ως προς A) αν $A^n x_1 \perp A^m x_2$ για κάθε $n, m = 0, 1, \ldots$, ισοδύναμα (γιατί;) αν οι κυκλικοί υπόχωροι που παράγονται από τα x_1 και x_2 είναι κάθετοι.

Έστω $\{x_i : i \in I\}$ μια μεγιστική[7] οικογένεια από πολύ κάθετα διανύσματα, και για κάθε i έστω $\mathcal{H}_i = \overline{[A^n x_i : n = 0, 1, \ldots]}$ ο αντίστοιχος κυκλικός υπόχωρος.

[7] Η απόδειξη της ύπαρξης τέτοιας οικογένειας είναι τυπική εφαρμογή του Λήμματος Zorn.

Εφόσον $A(A^n x_i) = A^{n+1}x_i \in \mathcal{H}_i$ για κάθε n και ο A είναι συνεχής, έπεται ότι $A(\mathcal{H}_i) \subseteq \mathcal{H}_i$ για κάθε i.

Μένει να δειχθεί ότι το ευθύ άθροισμα $\oplus_i \mathcal{H}_i$ είναι όλος ο $\mathcal{H}$.

Πράγματι, αν ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ είναι κάθετο στον $\oplus_i \mathcal{H}_i$ τότε για κάθε $i \in I$ και κάθε $n, m = 0, 1, \ldots$ έχουμε

$$\langle A^n x, A^m x_i \rangle = \langle x, A^{n+m} x_i \rangle = 0$$

(διότι $A^{n+m}x_i \in \mathcal{H}_i$) πράγμα που δείχνει (γιατί;) ότι ο κυκλικός υπόχωρος $\mathcal{H}_x$ που παράγεται από το x είναι κάθετος στον $\mathcal{H}_i$. Αυτό αντιβαίνει στην μεγιστικότητα της οικογένειας $\{x_i : i \in I\}$. $\square$

Από το Λήμμα 6.3.1, για κάθε $i \in I$ υπάρχει πεπερασμένο θετικό μέτρο Borel μ_i στον $\sigma(A)$ και ισομετρία

$$U_i : L^2(\sigma(A), \mu_i) \to \mathcal{H} \text{ ώστε } AU_i = U_i M_{f_i} \tag{*}$$

όπου $f_i(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in \sigma(A)$), και το σύνολο τιμών της U_i είναι $\mathcal{H}_i$. Δηλαδή, αν θέσουμε $A_i = A|_{\mathcal{H}_i}$, κάθε A_i είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_{f_i} που δρα στον χώρο $L^2(\sigma(A), \mu_i)$.

Θα δείξουμε ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν κατάλληλο πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f στον $L^2(X, \mu)$, όπου ο (X, μ) είναι η λεγόμενη *ξένη ένωση* των χώρων μέτρου $(\sigma(A), \mu_i)$, $i \in I$. Για να αποφύγουμε ορισμένες μετροθεωρητικές δυσκολίες, θα υποθέσουμε στο εξής[8] ότι

> *ο χώρος $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος, οπότε και η οικογένεια $\{x_i\}$ είναι αριθμήσιμη (βλ. Άσκηση 1.14.).*

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $I = \mathbb{N}$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε, όπως θα δούμε, να πάρουμε για (X, μ) τον $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με ένα κατάλληλο μέτρο Borel.

Παρατηρούμε πρώτα ότι, εφόσον $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$, η διάμετρος του $\sigma(A)$ δεν υπερβαίνει το $2\|A\|$. Επομένως, αν θέσουμε $a = 3\|A\|$ και

[8] Τονίζουμε ότι η υπόθεση αυτή γίνεται μόνον για ευκολία στην απόδειξη· το θεώρημα 6.3.6 ισχύει και σε μη διαχωρίσιμους χώρους.

$$X_i = \sigma(A) + ia = \{\lambda + ia : \lambda \in \sigma(A)\},$$

τα σύνολα X_i, $i \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανα δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορίζουμε το εξής μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$:

$$\mu(Y) = \sum_i \mu_i(\phi_i(Y \cap X_i)), \qquad Y \subseteq \mathbb{R} \text{ Borel}$$
$$\text{όπου} \quad \phi_i : X_i \to \sigma(A) : t \to t - ia.$$

Είναι εύκολη άσκηση Θεωρίας Μέτρου να ελέγξει κανείς ότι το μ είναι πράγματι μέτρο και είναι σ-πεπερασμένο, αφού κάθε μ_i είναι πεπερασμένο.

Απεικονίζουμε τώρα τους χώρους $L^2(\sigma(A), \mu_i)$, $i \in \mathbb{N}$ ισομετρικά σε κάθετους ανά δύο υποχώρους του $L^2(\mathbb{R}, \mu)$:

Ισχυρισμός *Για κάθε i η απεικόνιση*

$$W_i : L^2(\mathbb{R}, \mu) \to L^2(\sigma(A), \mu_i)$$
$$\text{όπου} \quad (W_i g)(\lambda) = g(\lambda + ia), \quad \lambda \in \sigma(A)$$

είναι γραμμική, επί και ικανοποιεί

$$\|W_i g\| = \left\| g|_{X_i} \right\| \text{ για κάθε } g \in L^2(\mathbb{R}, \mu).$$

Απόδειξη Η W_i είναι επί του $L^2(\sigma(A), \mu_i)$, γιατί αν $h \in L^2(\sigma(A), \mu_i)$ θέτοντας $g(t) = h(\phi_i(t))$ για $t \in X_i$ και $g(t) = 0$ για $t \notin X_i$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 d\mu(t) = \int_{X_i} |h(\phi_i(t))|^2 d\mu(t) = \int_{\sigma(A)} |h(\lambda)|^2 d\mu_i(\lambda) < \infty$$

άρα $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ και $W_i g = h$.

Έστω $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Αν η g μηδενίζεται στο X_i τότε για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ έχουμε $(W_i g)(\lambda) = 0$ εφόσον $\lambda + ia \in X_i$.

Αν η g μηδενίζεται στο X_i^c τότε ισχυρίζομαι ότι $\|W_i g\| = \|g\|$. Πράγματι αρκεί να αποδειχθεί ο ισχυρισμός όταν η g είναι απλή συνάρτηση, $g = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{Y_k}$ όπου

$Y_k \subseteq X_i$ ξένα Borel. Έχουμε $W_i g = \sum_k c_k \chi_{\phi_i(Y_k)}$ (γιατί $W_i(\chi_Y) = \chi_{\phi_i(Y)}$), άρα

$$\|W_i g\|^2 = \sum_k |c_k|^2 \left\|\chi_{\phi_i(Y_k)}\right\|^2 = \sum_k |c_k|^2 \mu_i(\phi_i(Y_k)) = \sum_k |c_k|^2 \mu(Y_k) = \|g\|^2.$$

Έπεται ότι για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ ισχύει

$$\|W_i g\| = \left\|W_i(g|_{X_i}) + W_i(g|_{X_i^c})\right\| = \left\|W_i(g|_{X_i})\right\| = \left\|g|_{X_i}\right\|$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε ονομάσει $f_i \in L^\infty(\sigma(A), \mu_i)$ τη συνάρτηση $f_i(\lambda)=\lambda$ ($\lambda \in \sigma(A)$). Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f(t) = \begin{cases} f_i(t - ia), & \text{αν υπάρχει } i \text{ ώστε } t \in X_i \\ 0, & \text{αν } t \notin \cup_i X_i \end{cases}$$

Η f ανήκει στον $L^\infty(\mathbb{R}, \mu)$ γιατί $\|f\|_\infty = \sup_i \|f_i\|_\infty = \|A\|$, άρα ορίζεται ο τελεστής M_f στον $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Παρατηρούμε ότι

$$W_i M_f = M_{f_i} W_i$$

Πράγματι, για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$, αν $\lambda \in \sigma(A)$ έχουμε

$$(W_i fg)(\lambda) = (fg)(\lambda + ia) = f(\lambda + ia)g(\lambda + ia) = f_i(\lambda)g(\lambda + ia)$$

οπότε

$$W_i M_f g = W_i(fg) = f_i(W_i g) = M_{f_i} W_i g.$$

Επειδή όμως $U_i M_{f_i} = AU_i$ (βλ. (*)), έπεται ότι

$$U_i W_i M_f = U_i M_{f_i} W_i = AU_i W_i. \tag{**}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ έχουμε $U_i W_i g \in \mathcal{H}_i$ άρα τα $U_i W_i g$ είναι ανά δύο κάθετα και επομένως, αφού η U_i είναι ισομετρία,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \|U_i W_i g\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \|W_i g\|^2 &= \sum_{i=1}^\infty \left\|g|_{X_i}\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_{X_i} |g|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}} |g|^2 d\mu = \|g\|^2 . \end{aligned}$$

Έπεται ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} U_i W_i g$ συγκλίνει στον $\mathcal{H}$ και ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} U_i W_i g \right\|^2 = \|g\|^2 .$$

Αν λοιπόν ορίσουμε την απεικόνιση

$$U : L^2(\mathbb{R}, \mu) \to \mathcal{H} : \quad g \to \sum U_i W_i g$$

τότε η U είναι ισομετρία. Η εικόνα της περιέχει κάθε $\mathcal{H}_i$, άρα και την κλειστή γραμμική τους θήκη, που είναι ο $\mathcal{H}$. Δηλαδή η U είναι ισομετρία επί, άρα ορθομοναδιαίος τελεστής. Τέλος, για κάθε $g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$,

$$UM_f g = \sum U_i W_i M_f g \overset{(**)}{=} \sum AU_i W_i g = A \sum U_i W_i g = AUg$$

επομένως $UM_f = AU$ και άρα

$$A = UM_f U^{-1}.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει (με την επιπλέον υπόθεση ότι ο $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος) το

Θεώρημα 6.3.6 (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)
Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to \mathcal{H}$ ώστε $A = UM_f U^{-1}$.

Παράρτημα: Χώροι Banach

Στο Παράρτημα αυτό παραθέτουμε τις κυριότερες έννοιες από την θεωρία μετρικών χώρων και (κυρίως) χώρων Banach που χρησιμοποιήθηκαν.
Για πλήρη ανάπτυξη και αποδείξεις ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [13].

Ένας *μετρικός χώρος* (X, d) είναι ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια απεικόνιση

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

(την *μετρική*) που ικανοποιεί

$$\begin{aligned}
&d(x, y) \geq 0 \text{ για κάθε } x, y \in X \\
&d(x, y) = 0 \iff x = y \\
&d(x, y = d(y, x) \text{ για κάθε } x, y \in X \\
&d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ για κάθε } x, y, z \in X.
\end{aligned}$$

Αν E είναι (πραγματικός ή μιγαδικός) γραμμικός χώρος, μια *νόρμα* στον E είναι μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$$

με τις ιδιότητες[9]

$$\begin{aligned}
&\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\
&\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\
&\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad (x, y \in E, \ \lambda \in \mathbb{K}).
\end{aligned}$$

[9]Εδώ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Με $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ συμβολίζουμε την κλειστή μοναδιαία μπάλλα ενός χώρου με νόρμα E και γράφουμε $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$.

Ένας χώρος με νόρμα γίνεται μετρικός χώρος αν εφοδιασθεί με την απόσταση (μετρική) $d(x, y) = \|x - y\|$.

Δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ σε έναν γραμμικό χώρο E λέγονται *ισοδύναμες* αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}_+$ ώστε

$$a\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\,\|x\|_2 \quad \text{για κάθε } \ x \in E.$$

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, d) λέγεται *ανοικτό (open)* αν περιέχει μια περιοχή κάθε στοιχείου του, δηλαδή αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $d(b, a) < \delta$ τότε $b \in A$. Το A λέγεται *κλειστό (closed)* αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό, ισοδύναμα αν για κάθε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A που συγκλίνει, ισχύει $\lim_n a_n \in A$. Η *κλειστή θήκη (closure)* $\overline{A}$ του A είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το A. Το A λέγεται *πυκνό (dense)* στο X αν η κλειστή του θήκη είναι όλος ο X, δηλαδή αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του A που συγκλίνει στο x. Ο χώρος (X, d) λέγεται *διαχωρίσιμος (separable)* αν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, d) λέγεται *συμπαγές (compact)* αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του A έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή για κάθε οικογένεια $\{U_i : i \in I\}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ υπάρχουν $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$.

Μια ακολουθία (sequence) (x_n) σ' έναν μετρικό χώρο (X, d) *συγκλίνει (converges)* στο $x \in X$ αν $\lim_n d(x_n, x) = 0$, δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_o$. Η (x_n) λέγεται *βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_o$. Ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται *πλήρης (complete)* αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) του X έχει όριο $x \in X$. Ένας χώρος με νόρμα που είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα λέγεται *χώρος Banach.*

Θεώρημα 7.3.7 (Baire) *Αν (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος και G_n, $n = 1, 2, \ldots$ ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X, τότε η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη [13], Πόρισμα 2.25.

Αν $(E, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n \in E$, η *σειρά* $\sum_n x_n$ συγκλίνει στο $s \in E$ αν η ακολουθία (s_n) των *μερικών αθροισμάτων* (όπου $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$) συγκλίνει στο s.

Μία απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ μετρικών χώρων (X, d) και (Y, ρ) λέγεται *συνεχής (continuous)* στο $x \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ ώστε για κάθε $y \in X$, αν $d(y, x) < \delta$ τότε $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$. Η f λέγεται *συνεχής* στον X αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$. Η f είναι συνεχής στον X αν και μόνον αν για κάθε ανοικτό $U \subseteq Y$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον X.

Η f λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής (uniformly continuous)* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε για κάθε x και y στο X, αν $d(y, x) < \delta$ τότε $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$.

Αν X είναι μη κενό σύνολο και (Y, d) μετρικός χώρος, μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων $f_n : X \to Y$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ *κατά σημείο (pointwise convergence)* αν για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ συγκλίνει στο $f(x)$, αν δηλαδή για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να έχουμε $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει στη συνάρτηση f *ομοιόμορφα (uniform convergence)* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ και κάθε $x \in X$ να έχουμε $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Αν και ο X είναι μετρικός χώρος, το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Αν $Y = \mathbb{R}$ ή $Y = \mathbb{C}$, το ομοιόμορφο όριο φραγμένων συναρτήσεων είναι φραγμένη συνάρτηση. Τότε, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν και μόνον αν $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$, όπου

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ μεταξύ μετρικών χώρων (X, d) και (Y, ρ) λέγεται *ισομετρία* αν για κάθε x και $y \in X$ ισχύει $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Μία ισομετρία είναι προφανώς 1-1 και επίσης ομοιόμορφα συνεχής. Η f λέγεται *ισομετρικός ισομορφισμός* αν είναι ισομετρία και επί.

Μια απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ (μιγαδικών) γραμμικών χώρων λέγεται *γραμμική (linear)* αν $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$ για κάθε $x, y \in E$ και κάθε

$\lambda \in \mathbb{C}$. Η *εικόνα (image)* της T είναι ο γραμμικός υπόχωρος

$$\operatorname{im} T = \{T(x) : x \in E\} \subseteq F$$

και ο *πυρήνας (kernel)* της T είναι ο γραμμικός υπόχωρος

$$\ker T = \{x \in E : T(x) = 0\} \subseteq E.$$

Ένα υποσύνολο A ενός γραμμικού χώρου E λέγεται *κυρτό (convex)* αν περιέχει τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα σημεία του, δηλαδή αν για κάθε $x, y \in A$ και $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$.

Ορισμός 7.3.2 *Έστω $(E, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ο* **(τοπολογικός) δυϊκός (topological dual)** *E^* του E είναι το σύνολο των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $f : E \to \mathbb{K}$. Είναι γραμμικός χώρος ως προς τις πράξεις κατά σημείο. Αν $f \in E^*$, ο αριθμός*

$$\|f\| \equiv \sup\{|f(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

είναι πεπερασμένος, και η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον E^*.

Ο δυϊκός ενός χώρου με νόρμα είναι πλήρης χώρος. Δεν είναι όμως καθόλου προφανές ότι ο δυϊκός κάθε χώρου με νόρμα περιέχει μη μηδενικά στοιχεία. Αυτό είναι συνέπεια του Θεωρήματος Hahn-Banach:

Θεώρημα 7.3.8 (Hahn-Banach, αναλυτική μορφή) *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X. Αν $y^* : Y \to \mathbb{K}$ είναι συνεχής γραμμική μορφή (δηλ. $y^* \in Y^*$), τότε υπάρχει $x^* : X \to \mathbb{K}$ συνεχής γραμμική μορφή (δηλ. $x^* \in X^*$) με την ίδια νόρμα (δηλ. $\|x^*\| = \|y^*\|$) που επεκτείνει την y^* (δηλ. $x^*|_Y = y^*$).*

Απόδειξη [13], Πόρισμα 3.25.

Πόρισμα 7.3.9 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $x \in X$. Τότε*

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, \|x^*\| = 1\}.$$

Απόδειξη [13], Πόρισμα 3.26 (iii).

Θεώρημα 7.3.10 (Αρχή Ομοιομόρφου φράγματος)
(Principle of Uniform Boundedness) *Έστω X χώρος* **Banach**, *Y χώρος με νόρμα και $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ οικογένεια φραγμένων τελεστών. Αν η $\mathcal{T}$ είναι κατά σημείο φραγμένη, τότε είναι ομοιόμορφα φραγμένη.*

Δηλαδή, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $M_x \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $T \in \mathcal{T}$ να ισχύει $\|T(x)\| \leq M_x$, τότε υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $T \in \mathcal{T}$ να ισχύει $\|T\| \leq M$.

Απόδειξη [13], Θεώρημα 3.42.

Θεώρημα 7.3.11 (Banach-Steinhaus) *Έστω X χώρος* **Banach**, *Y χώρος με νόρμα και $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ακολουθία φραγμένων τελεστών. Αν για κάθε $x \in X$ το όριο της ακολουθίας $(T_n(x))$ υπάρχει στον Y, τότε υπάρχει* **φραγμένος** *γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ ώστε $T(x) = \lim_n T_n(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη [13], Πόρισμα 3.43.

Παρατήρηση Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ *γραμμική* απεικόνιση. Αν η T είναι **επί** του Y, τότε είναι ανοικτή.

Θεώρημα 7.3.12 (Ανοικτής Απεικόνισης (open mapping))
Έστω X, Y χώροι **Banach** *και $T : X \to Y$ γραμμική, συνεχής και επί. Τότε η T είναι ανοικτή.*

Απόδειξη [13], Θεώρημα 3.36.

Θεώρημα 7.3.13 (Κλειστού Γραφήματος (closed graph))
Έστω X, Y χώροι **Banach** *και $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση. Αν το* γράφημα *$Gr(T) \equiv \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in X\}$ είναι κλειστό στον χώρο $X \times Y$, τότε η T είναι συνεχής.*

Απόδειξη [13], Θεώρημα 3.40.

Θεώρημα 7.3.14 (Weierstrass) *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ προσεγγίζεται από μια ακολουθία πολυωνύμων, ομοιόμορφα στο $[a, b]$.*

Απόδειξη [16] Θεώρημα 35-Α.

Θεώρημα 7.3.15 (Stone - Weierstrass) *Έστω K συμπαγής μετρικός (ή γενικότερα Hausdorff) χώρος. Αν $\mathcal{A}$ είναι υπάλγεβρα της άλγεβρας $C(K)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ η οποία (i) χωρίζει τα σημεία του K, (ii) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και (iii) έχει την ιδιότητα $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$, τότε η $\mathcal{A}$ είναι $\|\cdot\|_\infty$-πυκνή στην $C(K)$.*

Απόδειξη [16] Θεώρημα 36-B.

Σημειώνουμε ότι η ιδιότητα (iii) δεν μπορεί να παραλειφθεί, προκειμένου για συναρτήσεις με *μιγαδικές* τιμές. Παράδειγμα: Η άλγεβρα των πολυωνυμικών συναρτήσεων $p : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ όπου $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ικανοποιεί τις (i) και (ii). Όμως η συνεχής συνάρτηση $f(z) = \bar{z}$ δεν προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα.

Θεώρημα 7.3.16 (Ascoli) *Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος. Ένα κλειστό υποσύνολο F του χώρου $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι norm-συμπαγές αν και μόνον αν είναι* ισοσυνεχές *και (ομοιόμορφα) φραγμένο.*

(Το F λέγεται ισοσυνεχές αν για κάθε $x \in K$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει περιοχή U του x ώστε για κάθε $y \in U$ *και για κάθε* $f \in F$ να ισχύει $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.)

Απόδειξη [16] Θεώρημα 25-C. Το Θεώρημα ισχύει και όταν ο K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff (βλ. [13, Θεώρημα 14.33]).

Βιβλιογραφία

[1] J.B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[2] I. Gohberg & S. Goldberg, *Basic operator theory* (Reprint of the 1981 original), Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[3] P.R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, N.Y., 1951.

[4] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1982.

[5] G. Helmberg, *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*, North-Holland, 1975.

[6] H. Heuser, *Functional Analysis*, Wiley, 1982.

[7] R.V. Kadison & J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras* (2 Vols), Academic Press, 1983.

[8] T.W. Korner, *Fourier analysis*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1989.

[9] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988.

[10] A.N. Kolmogorov & S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover, 1975.

[11] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York 1998.

[12] Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιάς Μεταβλητής*, Αθήνα 1982.

[13] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδ. Συμμετρία, 1988.

[14] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[15] I.E. Segal & R.A. Kunze, *Integrals and Operators*, McGraw-Hill, 1968.

[16] G.F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, 1963.

[17] N.J. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, 1988.