Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις 1
Παράδοση: 4 Μαρτίου 2010

Άσκηση 1 Έστω $a = (a_n)$ ακολουθία αριθμών. Για κάθε $x = (x_n) \in \ell^2$, θέτουμε $D_a(x) = (a_n x_n)$. Δείξτε ότι $D_a(\ell^2) \subseteq (\ell^2)$ αν και μόνον αν $a \in \ell^\infty$.

Άσκηση 2 * Δείξτε ότι ένας $\infty \times \infty$ πίνακας (a_{ij}) ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν απεικονίζει τον ℓ^2 στον εαυτό του, δηλαδή αν $x = (x_n) \in \ell^2$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η σειρά $\sum_k a_{nk} x_k$ συγκλίνει και $(\sum_k a_{nk} x_k)_n \in \ell^2$. [Υπόδειξη: Αρχή Ομοιομόρφου φράγματος.]

Άσκηση 3 Έστω $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $f \in C[0,1]$ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 k(x,y) f(y) dy$ υπάρχει για κάθε $x \in [0,1]$ και ορίζει *συνεχή* συνάρτηση $A_k f : [0,1] \to \mathbb{C}$ από τον τύπο

$$(A_k f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy.$$

Αποδείξτε την ανισότητα

$$\int_0^1 |(A_k f)(x)|^2 dx \leq \|k\|_{22}^2 \int_0^1 |f(y)|^2 dy$$

(όπου $\|k\|_{22}^2 = \iint |k(x,y)|^2 dx dy$). Να συμπεράνετε ότι ο A_k επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2 \to L^2$.

(β) Προαιρετικά: Ίδια άσκηση με $f \in L^2[0,1]$ και $k \in L^2([0,1]^2)$ (η συνάρτηση $A_k f$ είναι μετρήσιμη).

Άσκηση 4 Αν $f \in C[0,1]$, θέτουμε

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x \in [0,1]).$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση V επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από τον $L^2[0,1]$ στον $L^2[0,1]$.

Άσκηση 5 Αν $C^1(0,1)$ είναι οι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : (0,1) \to \mathbb{C}$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$D : (C^1(0,1), \|\cdot\|_2) \to (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) : f \to f'$$

(όπου $\|\cdot\|_2$ η νόρμα του $L^2(0,1)$. Δείξτε ότι η D ΔΕΝ είναι συνεχής. Αν ορίσουμε $\|f\|_D \equiv \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2}$, τότε η $\|\cdot\|_D$ είναι νόρμα που προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο και η απεικόνιση

$$D : (C^1(0,1), \|\cdot\|_D) \to (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) : f \to f'$$

ΕΙΝΑΙ συνεχής.

Άσκηση 6 Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $K_g : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ από τον τύπο

$$(K_g f)(x) = \int_0^1 g(x-y) f(y) dy \qquad (f \in L^2[0,1]).$$

Βρείτε τον πίνακα του τελεστή K_g ως προς την ορθοκανονική βάση $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$, όπου $f_k : [0,1] \to \mathbb{C} : t \to e^{2\pi i k t}$.