Θεωρία Μέτρου (2022–23)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 4

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 8 Ιανουαρίου 2023)

1. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο. Με κάθε μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες, εξετάστε αν ισχύει $\int f_n \, d\lambda \to 0$.

(i) $|f_n| \leqslant 1$ και $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \neq 0\}) \leqslant 1$ για κάθε n.

(ii) $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε n.

(iii) $f_n \geqslant 0$ και $\int f_n \, d\lambda \leqslant 1$ για κάθε n.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι το μ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν: «$\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$ και για κάθε ακολουθία (f_n) μη αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $f_n \to 0$ ομοιόμορφα, ισχύει $\int f_n d\mu \to 0$».

3. Έστω $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και για κάθε $x \in [0, 1]$, και

$$\int_E g_n(x) \, d\lambda(x) \longrightarrow 0$$

για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0, 1]$. Αποδείξτε ότι: για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(x) g_n(x) \, d\lambda(x) \longrightarrow 0.$$

4. Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$ και

$$\int_0^1 |f_n|^2 \, d\lambda \leqslant 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 |f_n| \, d\lambda \to 0.$$

5. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι περιοδική με περίοδο 1. Αποδείξτε ότι, για κάθε $f \in L^1(\lambda)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(nx) \, d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda \cdot \int_0^1 g \, d\lambda.$$

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L^1(\mu)$. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \ln\left(1 + \frac{|f|^2}{n^2}\right) d\mu.$$

7. Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(\mathbb{R} \setminus F) < \infty$. Ορίζουμε

$$\delta(x) := \mathrm{dist}(x, F) = \inf\{||x - y| : y \in F\}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, d\lambda(y).$$

Αποδείξτε ότι $I(x) = \infty$ για κάθε $x \notin F$ και $I(x) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in F$. Θα βοηθήσει να θεωρήσετε το $\int_F I(x)\, d\lambda(x)$.

8. (α) Θεωρούμε το σύνολο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x < y + 2\pi\}$. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x,y) = \sin(x) \cdot \chi_A(x,y)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy.$$

Εξηγήστε γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα Fubini.
(β) Έστω B Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(B) = 1$. Υπολογίστε το

$$\lambda_2(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1+x^2)(y - e^x) \in B\}).$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη και $t > 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(u)\, d\lambda(u)$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_t|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

10. Έστω μ και ν μέτρα Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\rho(A) = (\mu \times \nu)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\})$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Το ρ είναι καλά ορισμένο μέτρο Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\rho(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x)\, d\mu(x).$$