Θεωρία Μέτρου (2022–23)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 11 Δεκεμβρίου 2022)

1.(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ ασυνεχής στο } x\}$ να είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\limsup n^2 \mu(\{|f_n| \geqslant 1/n^2\}) < \infty.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.

3. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ με

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k |x - a_k|}$$

αν $x \notin A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ και $f(x) = \infty$ αν $x \in A$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}) = \infty.$$

4. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η δείκτρια συνάρτηση χ_E είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων αν και μόνο αν το E είναι ταυτόχρονα G_δ και F_σ σύνολο.

5. Υπολογίστε τα

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1 + nx}{n + x} \cos x \, dx$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n (1 + \sqrt{n}|\sin t|) \, dt.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $0 < \mu(X) < \infty$ και $f \in L^1(\mu)$ φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\int_X f^2 \, d\mu = \int_X f^3 \, d\mu = \int_X f^4 \, d\mu.$$

Αποδείξτε ότι $f = \chi_A$ για κατάλληλο $A \in \mathcal{A}$.

7. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε

$$\Big|\frac{g(t)}{t}\Big| \leqslant \alpha$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_1^t f(s) g(s) \, d\lambda(s) = 0.$$

8. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + k)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x).$$

[*Υπόδειξη:* Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα.]

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $t > 1$ ορίζουμε

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \mu(\{t^n \leqslant |f| < t^{n+1}\}).$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 1^+} g(t) = \int_X |f|\, d\mu.$$

10. (α) Έστω $\alpha \in [0,1]$ και $E_1, \ldots, E_N$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με $\lambda(E_j) = \alpha$ για κάθε $j = 1, \ldots, N$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $i \neq j$ ώστε

$$\lambda(E_i \cap E_j) \geqslant \alpha^2 - \frac{\alpha}{N}.$$

(β) Έστω $\alpha \in [0,1]$ και $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με $\lambda(E_n) = \alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $0 < c < 1$ υπάρχουν $n \neq m$ ώστε

$$\lambda(E_n \cap E_m) \geqslant c\alpha^2.$$