Θεωρία Μέτρου (2022–23)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 23 Οκτωβρίου 2022)

1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcup_{k \in A} E_k : A \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X.

2. Αποδείξτε ότι η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές και διαστολές. Δηλαδή, αν $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα Borel σύνολο, τότε τα

$$t + B := \{t + x : x \in B\} \quad \text{και} \quad tB := \{tx : x \in B\}$$

είναι Borel σύνολα.

3. (α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία αλγεβρών στο X. Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι άλγεβρα στο X.

(β) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \cdots$ μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών στο X. Είναι απαραίτητα σωστό ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι σ-άλγεβρα στο X;

4. Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{E}$ λέγεται *στοιχειώδης οικογένεια* αν ικανοποιεί τα εξής: (α) $\varnothing \in \mathcal{E}$, (β) αν $E, F \in \mathcal{E}$ τότε $E \cap F \in \mathcal{E}$, και (γ) αν $E \in \mathcal{E}$ τότε το $E^c := X \setminus E$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{E}$.

Αποδείξτε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι μια στοιχειώδης οικογένεια τότε η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{E_1 \cup \cdots \cup E_k : k \in \mathbb{N}, E_i \in \mathcal{E} \text{ ξένα ανά δύο}\}$$

των πεπερασμένων ξένων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα στο X.

5. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $0 < \mu(X) < \infty$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \mu(A_k)\right)^{1/n}$$

και

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mu(A_i \cap A_j)$$

για κάθε $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) > n - 1$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0.$$

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο και $\mu(X) = \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $r < \mu(A) < \infty$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου τέτοιος ώστε για κάθε $\varnothing \neq E \in \mathcal{A}$ να ισχύει $0 < \mu(E) < \infty$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$f(x) = \inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}, x \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $A_x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_x$ και $\mu(A_x) = f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $x, y \in X$ τότε είτε $A_x = A_y$ ή $A_x \cap A_y = \varnothing$.

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθίες συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοιες ώστε $\mu\left(\limsup_k A_k\right) = 1$ και $\mu\left(\liminf_k B_k\right) = 1$. Αποδείξτε ότι $\mu\left(\limsup_k (A_k \cap B_k)\right) = 1$.

Εξετάστε αν το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε την υπόθεση $\mu\left(\liminf_k B_k\right) = 1$ με την $\mu\left(\limsup_k B_k\right) = 1$.

9. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$. Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(A).$$

Αποδείξτε ότι το μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

10. Έστω μ ένα μέτρο στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\mu(B) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $0 < \mu(\mathbb{R}) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}.$$