**Θεωρία Μέτρου (2021–22)**
**Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1**

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 24 Οκτωβρίου 2021)

**1.** (α) Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $(A_n)$, $(B_n)$ δύο ακολουθίες συνόλων στην $\mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι

$$\limsup A_n \cap \limsup B_n \supseteq \limsup (A_n \cap B_n) \quad \text{και} \quad \limsup A_n \cup \limsup B_n = \limsup (A_n \cup B_n).$$

Ποιες είναι οι αντίστοιχες σχέσεις για το $\liminf$;
(β) Έστω $(a_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $A_n = (-\infty, a_n)$. Αποδείξτε ότι

$$(-\infty, \liminf a_n) \subseteq \liminf A_n \subseteq (-\infty, \liminf a_n] \quad \text{και} \quad (-\infty, \limsup a_n) \subseteq \limsup A_n \subseteq (-\infty, \limsup a_n].$$

Αποδείξτε ότι αν $\liminf A_n = \limsup A_n$ τότε το $\lim a_n$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι $\pm\infty$) αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

**2.** Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθίες συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοιες ώστε $\mu(\limsup_k A_k) = 1$ και $\mu(\liminf_k B_k) = 1$. Αποδείξτε ότι $\mu(\limsup_k (A_k \cap B_k)) = 1$.

Εξετάστε αν το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε την υπόθεση $\mu(\liminf_k B_k) = 1$ με την $\mu(\limsup_k B_k) = 1$.

**3.** (α) Έστω $(X,d)$ ένας μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του $X$ είναι $G_\delta$ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του $X$ είναι $F_\sigma$ σύνολο.
(β) Δώστε παράδειγμα $G_\delta$-συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι $F_\sigma$-σύνολο.
(γ) Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι $G_\delta$-σύνολο ούτε $F_\sigma$-σύνολο.
(δ) Έστω $A$ και $B$ κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Αποδείξτε όμως ότι είναι πάντα $F_\sigma$-σύνολο.

**4.** Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{D}$ οικογένεια μέτρων στην $\mathcal{A}$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}$ τότε υπάρχει $\mu_3 \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\mu_3 \geqslant \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Ορίζουμε

$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{D}\}, \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Αποδείξτε ότι το $\nu$ είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$.

**5.** Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ πλήρης χώρος μέτρου και $A, B, N \subseteq X$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mu(N) = 0$ και $A \cup N \in \mathcal{A}$ τότε $A \in \mathcal{A}$.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$ τότε $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.

**6.** Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Έστω $(A_i)_{i \in I}$ οικογένεια ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$. Αποδείξτε ότι το $I$ είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο.

**7.** Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου τέτοιος ώστε για κάθε $\varnothing \neq E \in \mathcal{A}$ ισχύει $0 < \mu(E) < \infty$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$f(x) = \inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}, x \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $A_x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_x$ και $\mu(A_x) = f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $x, y \in X$ τότε είτε $A_x = A_y$ ή $A_x \cap A_y = \varnothing$.

**8.** Έστω $\mu$ ένα μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με την ιδιότητα ότι $\mu(I) < \infty$ για κάθε φραγμένο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & , \text{ αν } x > 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = 0 \\ -\mu((x,0]) & , \text{ αν } x < 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η $F$ είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά.

**9.** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Λέμε ότι το $\mu$ είναι ημιπεπερασμένο αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$ και $0 < \mu(B) < \infty$.

(α) Αποδείξτε ότι κάθε $\sigma$-πεπερασμένο μέτρο είναι ημιπεπερασμένο και δώστε παράδειγμα μέτρου που δεν είναι ημιπεπερασμένο.

(β) Αν το $\mu$ είναι ημιπεπερασμένο, αποδείξτε ότι για κάθε $C > 0$ και κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = \infty$ υπάρχει $F \subset E$, $F \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $C < \mu(F) < \infty$.

**10.** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε $\mu_0$ στη $\mathcal{A}$, θέτοντας

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E \text{ και } \mu(F) < \infty\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Το $\mu_0$ είναι ημιπεπερασμένο μέτρο (το «ημιπεπερασμένο μέρος» του $\mu$).

(β) Αν το $\mu$ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu_0 = \mu$.

(γ) Υπάρχει μέτρο $\nu$ στη $\mathcal{A}$ που παίρνει μόνο τις τιμές $0$ και $\infty$, τέτοιο ώστε $\mu = \mu_0 + \nu$.