Θεωρία Μέτρου (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 3

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 13 Δεκεμβρίου 2020)

1. (α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με την f να είναι μετρήσιμη και το σύνολο $[f \neq g]$ να είναι $\lambda-$μηδενικό. Δείξτε ότι και η g είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω μια συνάρτηση $f : (a, b) \to [-\infty, \infty]$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < b - a$ ο περιορισμός $f|_{(a,b-\varepsilon)}$ να είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{E_n\}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.

(α) Αν $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\mu(\{x : \chi_{E_n}(x) \nrightarrow 0\}) = 0$. (Υπόδειξη: θυμηθείτε το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli.)

(β) Ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα με την ασθενέστερη υπόθεση $\mu(E_n) \to 0$;

3. Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

4. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και θεωρούμε ακολουθία $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμων συναρτήσεων με $|f_n| < \infty$ μ-σχεδόν παντού.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (λ_n) θετικών αριθμών ώστε $\lambda_n f_n \to 0$ κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty)$ και ακολουθία (r_n) θετικών αριθμών ώστε $|f_n| \leqslant r_n g$ μ-σχεδόν παντού για κάθε n.

5. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

6. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \, d\lambda \to 0$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f \in L^1(\mu)$ με $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n d\mu \to \int_A f d\mu.$$

8. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $E_n = \{x : |f(x)| \geqslant n\}$, να δείξετε ότι $n \cdot \mu(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, d\lambda = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.

9. Έστω μια ακολουθία $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\lambda(A_k) \geqslant 1/2$, για κάθε k και

(β) $\lambda(A_k \cap A_s) \leqslant 1/4$ για κάθε $k \neq s$.

Δείξτε ότι

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \geqslant 1.$$

10. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$ και έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_n |a_n| < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x - q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0,1]$.