Θεωρία Μέτρου (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 22 Νοεμβρίου 2020)

1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{A_n\}$ αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n).$$

2. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathcal{P}(X)$ λέγεται *μετρικό εξωτερικό μέτρο* αν ικανοποιεί το εξής: αν $E_1, E_2 \subseteq X$ και $\mathrm{dist}(E_1, E_2) > 0$, τότε $\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$. Αποδείξτε ότι, τότε, κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ είναι μ^*-μετρήσιμο. Συνεπώς, ο περιορισμός του μ^* στην $\mathcal{B}(X)$ είναι μέτρο.

3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A},\ E \subseteq A\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X.

(β) Έστω $\overline{\mu}$ το μέτρο που επάγεται από το μ^* στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*-μετρήσιμων συνόλων. Αν το αρχικό μέτρο μ είναι σ−πεπερασμένο, αποδείξτε ότι ο $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \overline{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

4. Έστω ϕ ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X και μ το επαγόμενο μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{M}_\phi)$. Αν $E, G \subseteq X$, το G λέγεται *ϕ−μετρήσιμο κάλυμμα* του E αν:

$$E \subseteq G,\ G \in \mathcal{M}_\phi \ \text{ και για κάθε } A \in \mathcal{M}_\phi \text{ με } A \subseteq G \setminus E \text{ ισχύει } \mu(A) = 0.$$

(α) Αν G_1 και G_2 είναι δύο ϕ−μετρήσιμα καλύμματα του ίδιου $E \subseteq X$, αποδείξτε ότι $\mu(G_1 \triangle G_2) = 0$.
(β) Αν $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{M}_\phi$ και $\phi(E) = \mu(G) < \infty$, αποδείξτε ότι το G είναι ένα ϕ−μετρήσιμο κάλυμα του E.

5. (α) Έστω $E \subset [a, b]$ με $\lambda^*(E) = 0$. Αποδείξτε ότι το $[a, b] \setminus E$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[a, b]$.

(β) Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μετρήσιμα $E, F \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda(E \cap F) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.

(γ) Έστω $A \subseteq [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

6. (α) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $F \supseteq E$,

$$\lambda^*(F \setminus E) = \lambda^*(F) - \lambda(E).$$

(β) Αποδείξτε ότι: αν $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda^*(E) < \infty$ και αν υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο F του E ώστε $\lambda(F) = \lambda^*(E)$, τότε το E είναι μετρήσιμο.

7. Έστω $\{q_n\}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει $N \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus N$ να έχει την εξής ιδιότητα:

«Υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $|x - q_n| \geqslant 1/n^2$».

8. Έστω $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{R}^k$. Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε $G_n = \{x \in \mathbb{R}^k : \mathrm{dist}(x, E) < 1/n\}$. Αποδείξτε ότι: αν το E είναι συμπαγές τότε $\lim_{n\to\infty} \lambda(G_n) = \lambda(E)$.

Ισχύει το ίδιο για κάθε κλειστό $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{R}^k$;

9. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(i) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue σε σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(ii) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

(β) Είναι σωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα;

10. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει ανοικτό πυκνό $U \subset [0, 1]$ με $\lambda(U) < \varepsilon$ και $\lambda(\partial(U)) > 1 - \varepsilon$, όπου $\partial(U)$ είναι το σύνορο του U.