Θεωρία Μέτρου – 14 Ιανουαρίου 2022

1. (1.5 μον.) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Αν $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$, αποδείξτε ότι $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

2. (1.5 μον.) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Έστω $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$. Αποδείξτε ότι το I είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο.

3. (2 μον.) Αποδείξτε ότι αν E, F είναι Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ τότε

$$\lambda(E \cup F) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F).$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι, για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$,

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

4. (2.5 μον.) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$, είναι μέτρο.

(β) Αποδείξτε ότι αν $g : X \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu.$$

5. (2.5 μον.) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι $f(x) < +\infty$ σχεδόν παντού.

(β) Ορίζουμε $f_n : X \to [0, +\infty)$ με $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Αποδείξτε ότι

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

6. (2 μον.) Έστω μ και ν μέτρα Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $\rho(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\})$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι το ρ είναι καλά ορισμένο μέτρο Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\rho(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x) \, d\mu(x).$$

Καλή Επιτυχία!