511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

1. Η f είναι φραγμένη: από την υπόθεση υπάρχει ολοκληρώσιμη $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $|f(x)-g(x)|<1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Η g είναι ολοκληρώσιμη, άρα φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει $\alpha>0$ ώστε $|g(x)|\le\alpha$ για κάθε $x\in[0,1]$. Έπεται ότι

$$|f(x)|\le|f(x)-g(x)|+|g(x)|<1+\alpha$$

για κάθε $x\in[0,1]$.

Έστω $\varepsilon>0$. Από την υπόθεση υπάρχει ολοκληρώσιμη $g_\varepsilon:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $|f(x)-g_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in[0,1]$. Έπεται ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\le\overline{\int_a^b}(g_\varepsilon(x)+\varepsilon)\,dx=\int_a^b g_\varepsilon(x)\,dx+\varepsilon$$

και

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\ge\underline{\int_a^b}(g_\varepsilon(x)-\varepsilon)\,dx=\int_a^b g_\varepsilon(x)\,dx-\varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\le 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, η f είναι ολοκληρώσιμη.

2. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $\alpha>0$ ώστε $|f(x)|\le\alpha$ για κάθε $x\in[0,1]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $0<b<1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η

$$2\alpha b<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[b,1]$ με την ιδιότητα

$$U(f,Q)-L(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P=\{0\}\cup Q$ του $[0,1]$. Τότε,

$$U(f,P)-L(f,P)=b(M_0-m_0)+U(f,Q)-L(f,Q)<b(M_0-m_0)+\frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0=\sup\{f(x):0\le x\le b\}\le\alpha\quad\text{και}\quad m_0=\inf\{f(x):0\le x\le b\}\ge-\alpha.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0-m_0\le 2\alpha$, άρα

$$U(f,P)-L(f,P)<2\alpha b+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

3. (α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P_1=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_1)-L(f,P_1)<b-a$. Περνώντας αν χρειαστεί σε εκλέπτυνση της P_1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλάτος της P_1 είναι μικρότερο από 1. Αφού

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k)<b-a=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k),$$

υπάρχει $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ ώστε $M_k-m_k<1$. Αν θέσουμε $a_1=x_k$ και $b_1=x_{k+1}$ βλέπουμε ότι $a_1<b_1$, $a_1,b_1\in[a,b]$, $b_1-a_1<1$ και

$$\sup\{f(x):a_1\le x\le b_1\}-\inf\{f(x):a_1\le x\le b_1\}=M_k-m_k<1.$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι υπάρχει $[a_2,b_2]\subseteq (a_1,b_1)$ με μήκος μικρότερο από $1/2$ ώστε

$$\sup\{f(x):a_2\leq x\leq b_2\}-\inf\{f(x):a_2\leq x\leq b_2\}<\frac{1}{2}.$$

Για να πετύχετε τον εγκλεισμό $[a_2,b_2]\subset (a_1,b_1)$ ξεκινήστε από ένα υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a_1,b_1]$ με $a_1<c<d<b_1$ (η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[c,d]$). Βρείτε διαμέριση P_2 του $[c,d]$ με $U(f,P_2)-L(f,P_2)<\frac{d-c}{2}$ και πλάτος μικρότερο από $1/2$ και συνεχίστε όπως πριν.

Επαγωγικά μπορείτε να βρείτε $[a_n,b_n]\subset (a_{n-1},b_{n-1})$ ώστε $b_n-a_n<1/n$ και

$$\sup\{f(x):a_n\leq x\leq b_n\}-\inf\{f(x):a_n\leq x\leq b_n\}<\frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο x_0. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0: έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $n\in\mathbb{N}$ με $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Αφού $x_0\in [a_{n+1},b_{n+1}]$, έχουμε $x_0\in (a_n,b_n)$. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset (a_n,b_n)$. Τότε, για κάθε $x\in (x_0-\delta,x_0+\delta)$ έχουμε

$$|f(x)-f(x_0)|\leq \sup\{f(x):a_n\leq x\leq b_n\}-\inf\{f(x):a_n\leq x\leq b_n\}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f στο x_0.

(δ) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία συνέχειας στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει διάστημα $[c,d]\subset [a,b]$ στο οποίο η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο από το προηγούμενο βήμα: η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε αυτό.

Για την ακρίβεια, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε δείχνει κάτι ισχυρότερο: αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε *κάθε υποδιάστημα* του $[a,b]$. Με άλλα λόγια, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι *πυκνό* στο $[a,b]$.

4. Από την προηγούμενη Άσκηση, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, υπάρχει $x_0\in [a,b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής. Αφού $f(x_0)>0$, υπάρχει διάστημα $J\subseteq [a,b]$ με μήκος $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in J$ ισχύει $f(x)>f(x_0)/2$. Αφού η f είναι μη αρνητική παντού στο $[a,b]$, έχουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx\geq \int_J f(x)\,dx\geq \delta\cdot\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

5. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των αρρήτων ελέγχουμε εύκολα ότι $L(f,P)=0$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Έστω $\varepsilon>0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A=\{x\in[0,1]:f(x)\geq\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. [Πράγματι, αν $f(x)\geq\varepsilon$ τότε $x=p/q$ και $f(x)=1/q\geq\varepsilon$ δηλαδή $q\leq 1/\varepsilon$. Οι ρητοί του $[0,1]$ που γράφονται σαν ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ ίσο με $[1/\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος (ένα άνω φράγμα για το πλήθος τους είναι ο αριθμός $1+2+\cdots+[1/\varepsilon]$ – εξηγήστε γιατί)].

Έστω $z_1<z_2<\cdots<z_N$ μία αρίθμηση των στοιχείων του A. Μπορούμε να βρούμε ξένα υποδιαστήματα $[a_i,b_i]$ του $[0,1]$ που έχουν μήκη $b_i-a_i<\varepsilon/N$ και ικανοποιούν τα εξής: $a_1>0$, $a_i<z_i<b_i$ αν $i<N$ και $a_N<z_N\leq b_N$ (παρατηρήστε ότι αν $\varepsilon\leq 1$ τότε $z_N=1$ οπότε $b_N=1$). Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P_\varepsilon=\{0<a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_N<b_N\leq 1\},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}U(f,P_\varepsilon) &\leq \varepsilon\cdot(a_1-0)+1\cdot(b_1-a_1)+\varepsilon\cdot(a_2-b_1)+\cdots+1\cdot(b_{N-1}-a_{N-1})\\ &\quad +\varepsilon\cdot(a_N-b_{N-1})+1\cdot(b_N-a_N)+\varepsilon\cdot(1-b_N)\\ &\leq \varepsilon\cdot\Big(a_1+(a_2-b_1)+\cdots+(a_N-b_{N-1})+(1-b_N)\Big)\\ &\quad +\sum_{i=1}^N(b_i-a_i)\\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε διαμέριση P_ε του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

6. Παρατηρήστε πρώτα ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(f(1)\int_0^1 nx^n dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f(1)\cdot\frac{n}{n+1}\right) = f(1).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n g(x)\,dx = 0,$$

όπου $g(x) = f(x) - f(1)$. Η g είναι συνεχής, άρα υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $|g(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της g στο 1 και το γεγονός ότι $g(1) = 0$, υπάρχει $\delta \in (0,1)$ ώστε $|g(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [1-\delta, 1]$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 nx^n g(x)\,dx\right| &\leq \int_0^{1-\delta} nx^n|g(x)|\,dx + \int_{1-\delta}^1 nx^n|g(x)|\,dx \\
&\leq \alpha\int_0^{1-\delta} nx^n dx + \varepsilon\int_{1-\delta}^1 nx^n dx \\
&\leq \alpha\cdot\frac{n(1-\delta)^{n+1}}{n+1} + \varepsilon\int_0^1 nx^n dx \\
&\leq \alpha\cdot\frac{n(1-\delta)^{n+1}}{n+1} + \varepsilon\cdot\frac{n}{n+1} \\
&\leq \alpha(1-\delta)^{n+1} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(1-\delta)^{n+1} = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha(1-\delta)^{n+1} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα,

$$\left|\int_0^1 nx^n g(x)\,dx\right| \leq 2\varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Έπεται η $(*)$.

7. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(y)| \leq M$ για κάθε $y \in [0,1]$. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Από τη συνέχεια της f στο 0, υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε: αν $0 \leq y \leq \delta$ τότε

$$|f(y) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right)^n < \delta.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ μπορούμε να γράψουμε (παρατηρήστε ότι αν $0 < x < 1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}$ τότε $|f(x^n) - f(0)| < \varepsilon/2$)

$$\begin{aligned}
|a_n - f(0)| &= \left|\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}(f(x^n) - f(0))dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (f(x^n) - f(0))dx\right| \\
&\leq \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} |f(x^n) - f(0)|\,dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (|f(x^n)| + |f(0)|)\,dx \\
&\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M+1}\cdot 2M \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, $a_n \to f(0)$.

8. Παρατηρήστε πρώτα ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(0)e^{-nx}dx = \lim_{n\to\infty}\left(f(0)\int_0^1 ne^{-nx}dx\right) = \lim_{n\to\infty}\big(f(0)\cdot(1-e^{-n})\big) = f(0).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 ne^{-nx}g(x)\,dx = 0,$$

όπου $g(x)=f(x)-f(0)$. Η g είναι συνεχής, άρα υπάρχει $\alpha>0$ ώστε $|g(x)|\leq\alpha$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Έστω $\varepsilon>0$. Από τη συνέχεια της g στο 0 και το γεγονός ότι $g(0)=0$, υπάρχει $\delta\in(0,1)$ ώστε $|g(x)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in[0,\delta]$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 ne^{-nx}g(x)\,dx\right| &\leq \int_0^\delta ne^{-nx}|g(x)|\,dx + \int_\delta^1 ne^{-nx}|g(x)|\,dx \\ &\leq \varepsilon\int_0^\delta ne^{-nx}dx + \alpha\int_\delta^1 ne^{-nx}dx \\ &\leq \varepsilon\cdot(1-e^{-n\delta}) + \alpha\cdot(e^{-n\delta}-e^{-n}) \\ &\leq \varepsilon + \alpha\cdot e^{-n\delta}.\end{aligned}$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha\cdot e^{-n\delta}=0$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\alpha\cdot e^{-n\delta}<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Άρα,

$$\left|\int_0^1 ne^{-nx}g(x)\,dx\right| \leq 2\varepsilon \text{ για κάθε } n\geq n_0.$$

Έπεται η $(*)$.