511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

(Ημερομηνία Παράδοσης: 10 Νοεμβρίου 2005)

1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ορίζουμε $\mu^*(\emptyset) = 0$ και $\mu^*(E) = 1$ για κάθε μη κενό $E \subseteq X$. Δείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X και βρείτε όλα τα μ^*–μετρήσιμα υποσύνολα του X.

2. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{C}$ που αποτελείται από το κενό σύνολο και από όλα τα δισύνολα φυσικών αριθμών. Ορίζουμε $\tau(\emptyset) = 0$ και $\tau(\{m,n\}) = 2$ για κάθε $\{m,n\} \in \mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ είναι σ–κάλυψη του $\mathbb{N}$, οπότε η τ επάγει ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathbb{N}$. Υπολογίστε το $\mu^*(E)$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ και βρείτε όλα τα μ^*–μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

3. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\varphi(E) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{card}(E \cap \{1,\dots,n\})$ (όπου $\mathrm{card}(A)$ είναι ο πληθάριθμος του A). Εξετάστε αν η φ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

4. Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο X. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X, δείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cap E) = \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\big).$$

5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A},\, E \subseteq A\}.$$

(α) Δείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X.

(β) Έστω $\overline{\mu}$ το μέτρο που επάγεται από το μ^* στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Αν το αρχικό μέτρο μ είναι σ–πεπερασμένο, δείξτε ότι ο $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \overline{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

6. Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο X και έστω μ το επαγόμενο μέτρο στη σ–άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*–μετρήσιμων συνόλων. Αν $E, G \subseteq X$ τότε λέμε ότι το G είναι ένα μ^*–**μετρήσιμο κάλυμα** του E αν:

$$E \subseteq G,\ G \in \mathcal{A}_{\mu^*} \text{ και για κάθε } A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \text{ με } A \subseteq G \setminus E \text{ ισχύει } \mu(A) = 0.$$

(α) Δείξτε ότι αν G_1, G_2 είναι δύο μ^*–μετρήσιμα καλύματα του ιδίου $E \subseteq X$, τότε $\mu(G_1 \triangle G_2) = 0$, και συνεπώς, $\mu(G_1) = \mu(G_2)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $\mu^*(E) = \mu(G) < +\infty$. Δείξτε ότι το G είναι μ^*–μετρήσιμο κάλυμα του E.

7. Λέμε ότι ένα $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο* αν για κάθε $\alpha > 0$ το σύνολο $\{x \in E : |x| > \alpha\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε $\mu^*(E) = 0$ αν το E είναι αριθμήσιμο, $\mu^*(E) = 1$ αν το E είναι υπεραριθμήσιμο αλλά δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο, και $\mu^*(E) = \infty$ αν το E έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Δείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Είναι σωστό ότι κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει μετρήσιμο κάλυμα;