511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8
(Ημερομηνία Παράδοσης: 19 Δεκεμβρίου 2005)

1. (Θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης). Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Άν $\mu(X) < \infty$, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

2. (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης). Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι υπάρχει $0 < M < \infty$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, δείξτε ότι

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

3. Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $g : X \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, δείξτε ότι

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

4. Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, δείξτε ότι

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

5. (Γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης). Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ και $g, g_n : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n$ $\mu - \sigma.\pi.$, $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, $g_n \to g$ $\mu - \sigma.\pi.$, και $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

6. Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ και $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\int_A f_n \, d\mu \to \int_A f \, d\mu \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

7. Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$. Δείξτε ότι

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int_X |f_n| \, d\mu \to \int_X |f| \, d\mu.$$

8. Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f_n \to 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ στο X. Ορίζουμε $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\int_X g_n \, d\mu \leq M$. Δείξτε ότι

$$\int_X f_n \, d\mu \to 0.$$