511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

(Ημερομηνία Παράδοσης: 24 Νοεμβρίου 2005)

1. Έστω A και B δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A \times B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ότι

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda_1(A) \cdot \lambda_2(B).$$

Υπόδειξη. Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που τα A και B είναι φραγμένα.

2. Έστω A το υποσύνολο του $[0,1]$ που αποτελείται από όλους τους αριθμούς που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα δεν περιέχει το ψηφίο 4. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο και βρείτε το $\lambda(A)$.

3. Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει ανοικτό διάστημα J ώστε

$$\lambda^*(A \cap J) \geq \alpha \cdot \lambda^*(J).$$

5. Έστω E και F δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) > 0$ και $\lambda(F) > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\}$$

περιέχει διάστημα.

6. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές, και δείξτε ότι αν το E είναι F_σ–σύνολο τότε το $T(E)$ είναι F_σ–σύνολο. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η T είναι Lipschitz συνεχής, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.

7. Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$. Ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο Lebesgue* του E θέτοντας

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_{(i)}(E) \leq \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

8. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*\left(\cup_{n=1}^\infty E_n\right) < \sum_{n=1}^\infty \lambda^*(E_n).$$