511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

(Ημερομηνία Παράδοσης: 12 Ιανουαρίου 2006)

Σε όλες τις Ασκήσεις, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, όλα τα υποσύνολα του X ανήκουν στην $\mathcal{A}$, και οι $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

1. Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο ή σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ κατά μέτρο ή σχεδόν ομοιόμορφα αντίστοιχα.

2. Έστω $E_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο ή κατά μέσο αν και μόνο αν $\mu(E_n \triangle E_m) \to 0$ όταν $m, n \to \infty$.

Εξετάστε αν ισχύει το εξής: η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα αν και μόνο αν $\mu(E_n \triangle E_m) \to 0$ όταν $m, n \to \infty$.

3. Αν $f_n \geq 0$ και $f_n \to f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

4. Αν $|f_n| \leq g$, $\int_X g\, d\mu < \infty$ και $f_n \to f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

5. (α) Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$ μ-σχεδόν παντού. Δείξτε ότι, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ και $M > 0$ ώστε: $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X \setminus A$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και $g_n \to g$ κατά μέτρο, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο.

6. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = 0$, όπου

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

7. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Λέμε ότι οι f_n είναι **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\left|\int_A f_n\, d\mu\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Δείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$ κατά μέτρο.

8. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Εξετάστε αν ισχύει το εξής: $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν $\int_A f_n\, d\mu \to \int_A f\, d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.