511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 10
(Ημερομηνία Παράδοσης: 12 Ιανουαρίου 2006)

1. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

2. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geq c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda_k(\limsup A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_{[a,x]} f \, d\lambda = 0$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $f = 0$ λ-σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

4. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

5. Έστω $E_1, \ldots, E_N$ Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_N$. Δείξτε ότι υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geq \frac{k}{N}$.

6. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν A είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του E με $\lambda(A) > \alpha$, τότε

$$\int_A f \, d\lambda \geq \delta.$$

7. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$ και έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. Δείξτε ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{|x - q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

8. Δείξτε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^2} \, dx = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2} \, dx = 0.$$