Διαφορικές Μορφές

Παναγιώτης Γ. Λαμπρόπουλος
22 Μαρτίου 2005

Τανυστική Άλγεβρα

Μία διατεταγμένη βάση $e_1,...,e_n$ ενός n-διάστατου διανυσματικού χώρου V ορίζει προσανατολισμό. Μία άλλη βάση $w_i = Ae_i$ διατηρεί τον προσανατολισμό εάν η ορίζουσα του A είναι θετική και σε αυτήν την περίπτωση η βάση $\{w_i\}$ ονομάζεται προσανατολισμένη. Κάθε χώρος έχει δύο προσανατολισμούς, έναν για θετική ορίζουσα και έναν για αρνητική.

1.1 Πολλαπλότητες και τοπικά συστήματα συντεταγμένων

Έστω M μία n-διάστατη, λεία, προσανατολισμένη πολλαπλότητα χωρίς σύνορο. Τότε τοπικά, σε κάθε σημείο $x_0 \in M$, υπάρχει μία γειτονιά που μπορεί να απεικονιστεί διαφορομορφικά σε μία περιοχή του n-διάστατου Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες x^μ, όπου μ=1,...,n. Ακολούθως θα δώσουμε μερικές χρήσιμες εκφράσεις σε αυτό τον τοπικό χάρτη με αυτές τις συντεταγμένες.

1.2 Εφαπτόμενος και Συνεφαπτόμενος χώρος

Ο εφαπτόμενος χώρος $T_{x_0}M$ στο σημείο $x_0 \in M$ είναι ένας διανυσματικός χώρος που παράγεται από τους γεννήτορες βάσης:

$$e_\mu = \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu \tag{1.1}$$

(coordinate base). Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα υ μπορεί να παρασταθεί από μία n-άδα υ^μ, π.χ.

$$\upsilon = \upsilon^\mu e_\mu \tag{1.2}$$

Ο συνεφαπτόμενος χώρος $T^*_{x_0}M$ στο σημείο $x_0 \in M$ ο διανυσματικός χώρος των γραμμικών απεικονίσεων $a: T_{x_0}M \to \mathbb{R},\ \upsilon \leftrightarrow \langle \alpha,\upsilon \rangle$ και παράγεται από τους γεννήτορες βάσης:

$$\omega^\mu = dx^\mu \tag{1.3}$$

(Coordinate base). Αυτή η βάση είναι δυϊκή της e_μ με την έννοια ότι

$$\left\langle \omega^\nu, e_\mu \right\rangle = \delta^\nu_\mu \tag{1.4}$$

Ένα συνεφαπτόμενο διάνυσμα α μπορεί να αναπαρασταθεί με τη n-αδα a^μ. Τότε

$$a = a_\mu \omega^\mu \tag{1.5}$$

και

$$\langle \alpha, \upsilon \rangle = \alpha_\mu \omega^\mu \tag{1.6}$$

(Γίνεται άθροιση ως προς επαναλαμβανόμενους δείκτες.)

1.3 Τανυστές τύπου (p,q)

Ένας τανυστής (p,q) είναι μία πραγματική πολυγραμμική απεικόνιση

$$\mathrm{A}: \underbrace{\mathrm{T}^*_{x_0}\mathrm{M} \times \cdots \times \mathrm{T}^*_{x_0}\mathrm{M}}_{p \text{ φορές}} \times \underbrace{\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{M} \times \cdots \times \mathrm{T}_{x_0}\mathrm{M}}_{q \text{ φορές}} \to \mathbb{R} \tag{1.7}$$

Μία βάση στον διανυσματικό χώρο των τανυστών τύπου (p,q) μπορεί να οριστεί ως

$$e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_p} \otimes \omega^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\nu_q} \tag{1.8}$$

Τότε ένας τανυστής αναπαρίσταται με τις συνιστώσες

$$A^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \tag{1.9}$$

Έτσι ώστε

$$A = A^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_p} \otimes \omega^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\nu_q} \tag{1.10}$$

1.4 Μετρική Riemann

Μία μετρική Riemann είναι ένας συμμετρικός τανυστής τύπου (0,2) του οποίου οι συνιστώσες δίνονται από ένα συμμετρικό, μη τετριμμένο, θετικά ορισμένο πίνακα $g_{\mu\nu}$. Η ευκλείδεια μετρική είναι

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ εάν } \mu=\nu \\ 0 \text{ εάν } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.11}$$

Η μετρική Riemann ορίζει το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$(u, w) = g_{\mu\nu} u^\mu w^\nu$$

και 1-forms

$$(\alpha, \beta) = g^{\mu\nu} \alpha_\mu \beta_\nu$$

Όπου $g^{\mu\nu}$ ο αντίστροφος πίνακας του $g_{\mu\nu}$. Επιπλέον ορίζει έναν ισομορφισμό ανάμεσα στα εφαπτόμενα ανύσματα και τις 1-forms $\alpha_\mu = g_{\mu\nu}\upsilon^\nu$, $\upsilon^\mu = g^{\mu\nu}\alpha_\mu$. Παρόμοια ορίζεται και η διαδικασία ανύψωσης και κατεβάσματος δεικτών για κάθε τανυστή.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Ένας τανυστής (0,s) ονομάζεται αντισυμμετρικός έαν αλλάζει πρόσημο όταν η σειρά δύο οποιωνδήποτε δεικτών αλλάξει, π.χ.

$$\alpha_{\dots\mu_i\dots\mu_j\dots} = -a_{\dots\mu_j\dots\mu_i\dots} \tag{2.1}$$

Οι αντισυμμετρικοί τανυστές τύπου (0,p), που ονομάζονται p-forms ή διαφορικές μορφές, αποτελούν υπόχωρο του

$$\underbrace{\mathrm{T}^*_{x_0}\mathrm{M}\times\cdots\times\mathrm{T}^*_{x_0}\mathrm{M}}_{p\ \text{φορές}} \tag{2.2}$$

Για λόγους απλότητας θα το συμβολίζουμε με Λ_p.

Έστω S_p η ομάδα μεταθέσεων των ακεραίων (1,....,p). Η υπογραφή sgn(σ) μιας αντιμετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(p) \end{pmatrix} \in S_p$ ορίζεται +1 εάν η σ είναι άρτια και -1 εάν είναι περιττή. Τότε για κάθε p-form ισχύει $a_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}} = \mathrm{sgn}(\sigma)a_{\mu_1\cdots\mu_p}$

Έτσι μία p-form α δίνεται από τις συνιστώσες $a_{\mu_1\dots\mu_p}$ όπου

$$1 \le \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{p-1} < \mu_p \le n \tag{2.3}$$

Οι άλλες συνιστώσες δίνονται από τη συμμετρία. Αλλά η συμμετρία δεν δίνει σχέσεις μεταξύ συνιστωσών με αυξανόμενους δείκτες. Έτσι καθίσταται προφανές ότι η διάσταση του χώρου των p-forms σε μία n-διάστατη πολλαπλότητα Μ είναι

$$\dim\Lambda_p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

για κάθε $0 \le p \le n$ και είναι 0 για κάθε p > n. Με άλλα λόγια , $\Lambda_p = \{0\}$ εάν p > n και η Λ_0 είναι μονοδιάστατη για p = 0 και p = n.

1.5 Εξωτερικό γινόμενο

Για κάθε τανυστή (0,p) ορίζουμε ένα τελεστή *εναλλαγής* ή *αντισυμμετρικοποίησης* Alt. Με όρους συνιστωσών η αντισυμμετρικότητα θα υποδηλώνεται με αγκύλες [ ], π.χ.

$$(AltT)_{\mu_1\dots\mu_p} = \mathrm{T}_{[\mu_1\dots\mu_p]} = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)T_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}}, \tag{2.5}$$

και η άθροιση γίνεται για p! μεταθέσεις του (1,...,p).

Αφού το τανυστικό γινόμενο δύο αντισυμμετρικών τανυστών δεν είναι αντισυμμετρικός τανυστής για να οριστεί η άλγεβρα των αντισυμμετρικών τανυστών πρέπει να ορίσουμε ένα αντισυμμετρικό τανυστικό γινόμενο που ονομάζεται εξωτερικό (exterior ή wedge) γινόμενο. Εάν *α* είναι p-form και β q-form τότε το εξωτερικό γινόμενο των *α* και β είναι (p + q) – form και ορίζεται ως

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} Alt(\alpha \otimes \beta) \tag{2.6}$$

και με όρους συνιστωσών $\left(\alpha \wedge \beta\right)_{\mu_1 \cdots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{[\mu_1 \cdots \mu_p} \beta_{\mu_{p+1} \cdots \mu_{p+q}]}$.

Το εξωτερικό γινόμενο έχει τις εξής ιδιότητες:

$$\left(\alpha \wedge \beta\right) \wedge \gamma = \alpha \wedge \left(\beta \wedge \gamma\right) \quad \text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} \beta \wedge \alpha \quad \text{(μη μεταθετικότητα)}$$

$$\left(\alpha + \beta\right) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma \quad \text{(επιμεριστικότητα)}$$

, όπου deg(α)=p ο βαθμός μίας p-form α.

Μία p-form μπορεί να παρασταθεί ισοδύναμα σαν

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{\mu_1 \cdots \mu_p} \omega^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \cdots \mu_p} \omega^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{\mu_p} \\ &= \sum_{\mu_1 < \ldots < \mu_p} \alpha_{\mu_1 \cdots \mu_p} \omega^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{\mu_p} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Το εξωτερικό γινόμενο μίας p-form α και μίας q-form β είναι:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!q!} a_{[\mu_1 \cdots \mu_p} \beta_{\mu_{p+1} \cdots \mu_{p+q}]} \omega^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\mu_{p+q}} \tag{2.8}$$

1.6 Στοιχειώδης όγκος

Η n-form $\varepsilon = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ ονομάζεται στοιχείο όγκου. Οι συνιστώσες $\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ δίνονται από το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο Levi-Civita

$$\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_m} = \begin{cases} +1 \text{ εάν } (\mu_1, \ldots, \mu_n) \text{ άρτια μετάθεση των } (1, \ldots, n) \\ -1 \text{ εάν } (\mu_1, \ldots, \mu_n) \text{ περιττή μετάθεση των } (1, \ldots, n) \\ 0 \text{ αλλιώς} \end{cases} \tag{2.9}$$

Επιπλέον, ο χώρος Λ_n των n-forms είναι μονοδιάστατος. Έτσι μια n-form α αναπαρίσταται ως $\alpha = f \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ με κάποιο βαθμωτό f. Η n-form

$$\sqrt{|g|} \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n \tag{2.10}$$

, όπου $|g| = \det g_{\mu\nu}$ και $g_{\mu\nu}$ η μετρική Riemann, ονομάζεται στοιχειώδης όγκος Riemann.

1.7 Εσωτερικό γινόμενο

Το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος υ και μίας p-form α είναι μία (p - 1)-form και ορίζεται ως $\left(i_v \alpha\right)_{\mu_1 \cdots \mu_p} = \frac{1}{(p-q)!} \upsilon^\mu \alpha_{\mu_1 \cdots \mu_{p-1}}$. Μπορεί να αποδειχτεί ξ εξής χρήσιμη σχέση

$$i_v \left(\alpha \wedge \beta\right) = \left(i_v \alpha\right) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \left(i_v \beta\right) \tag{2.11}$$

1.8 Hodge Star Duality Operator

Ο τελεστής $*$ απεικονίζει μια p-form σε μία (n – p)-form $*\alpha$ που ορλιζεται ως:

$$(*\alpha)_{\mu_{p+1}\cdots\mu_n} = \frac{1}{p!}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_p\mu_{p+1}\cdots\mu_n}\sqrt{|g|}g^{\mu_1\nu_1}...g^{\mu_p\nu_p}\alpha_{\nu_1\cdots\nu_p} \tag{2.12}$$

Ο τελεστής $*$ ικανοποιεί την εξής πολύ σημαντική ιδιότητα:

$$*^2\alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha \tag{2.13}$$

Σημείωση: Εάν n άρτιο τότε $*^2 = 1$ για κάθε p.

Τελος,

$$\begin{aligned} *(\alpha\wedge\beta) &= \alpha\times\beta \\ *\left[\alpha\wedge(*\beta)\right] &= \alpha\cdot\beta \end{aligned} \tag{2.14}$$

(Να αποδειχθεί.)

Εξωτερικός λογισμός

1.9 **Εξωτερική Παράγωγος (Βαθμίδα)**

Η εξωτερική παράγωγος μίας p-form είναι μία (p+1)-form με συνιστώσες:

$$\begin{aligned} (d\alpha)_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} &= (p+1)\partial_{[\mu_1}\alpha_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]} \\ &= \sum_{q=1}^{p+1}(-1)^{q-1}\partial_{\mu_q}\alpha_{\mu_1\cdots\mu_q\mu_{q+1}\cdots\mu_{p+1}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Είναι μία γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} &d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha\wedge d\beta \\ &d^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Για κάθε n-form α (p-form με τάξη ίση με τη διάσταση της πολλαπλότητας) η εξωτερική παράγωγος $d\alpha = 0$.

1.10 Συν-παράγωγος (Απόκλιση)

Με δεδομένη μία μετρική Riemann $g_{\mu\nu}$ μπορούμε να ορίσουμε την συν-παράγωγο μίας p - διαφορικής μορφής ως

$$\delta = *^{-1}(d\,*) = (-1)^{pn+p+1} *(d\,*) \tag{3.3}$$

Η συν-παράγωγος μίας διαφορικής μορφής p είναι η (p-1)-form:

$$\begin{aligned} (\delta\alpha)_{\mu_p\cdots\mu_{p-1}} &= \frac{1}{(n-p+1)!}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_{p-1}\mu_p\cdots\mu_n}\sqrt{|g|}g^{\nu\mu_p}g^{\nu_{p+1}\mu_{p+1}}...g^{\nu_n\mu_n} \\ &(n-p+1)\partial_\nu\left(\frac{1}{p!}\varepsilon_{\nu_1\cdots\nu_{p-1}\nu_p\cdots\nu_n}\sqrt{|g|}g^{\nu_1\lambda_1}...g^{\nu_p\lambda_p}\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι αφού $*^2 = \pm 1$ και $d^2 = 0$, ισχύει $\delta^2 = 0$.

Από τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να δούμε ότι για κάθε 0-form f (συνάρτηση), η $*f$ είναι n-form και έτσι $d*f=0$ και επομένως

$$\delta f = 0 \tag{3.5}$$

Για μία 1-form, η δα είναι 0-form

$$\boxed{\delta\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\alpha_\nu\right)} \tag{3.6}$$

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι για p-form α

$$(\delta\alpha)_{\mu_1\dots\mu_{p-1}} = g_{\mu_1\nu_1}\dots g_{\mu_{p-1}\nu_{p-1}}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\nu\left(\sqrt{|\gamma|}g^{\nu\lambda}g^{\nu_1\lambda_1}\dots g^{\nu_{p-1}\lambda_{p-1}}\alpha_{\lambda\lambda_1\dots\lambda_{p-1}}\right) \tag{3.7}$$

1.11 Ολοκλήρωση διαφορικών μορφών

Κάθε n-form μπορεί να ολοκληρωθεί πάνω σε μία n-διάστατη πολλαπλότητα M. Είναι απαραίτητο όμως να έχουμε εισάγει έναν άτλαντα τοπικών χαρτών με τοπικές συντεταγμένες που καλύπτουν όλη την πολλαπλότητα. Για λόγους απλότητας στην παρούσα μελέτη θα ασχοληθούμε με ολοκληρώματα πάνω σε ένα μόνο χάρτη. Έτσι θα έχουμε τις συντεταγμένες x^μ που απεικονίζουν μία περιοχή της πολλαπλότητας σε μία φραγμένη περιοχή U στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$. Αυτή η περιοχή υποτίθεται ότι έχει κάποιο όριο ∂U. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_U \alpha = \int_U \alpha_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \tag{3.8}$$

, είναι ένα σύνηθες πολλαπλό ολοκλήρωμα στις συντεταγμένες $x^1,\dots,x^n$ και ισχύει ο συνήθης συμβολισμός $\int_U \alpha = \int_U \alpha_{1\dots n}(x)dx^1\dots dx^n$.

Γενικότερα κάθε p-form μπορεί να ολοκληρωθεί σε μία p-διάστατη υποπολλαπλότητα N μίας n-διάστατης πολλαπλότητας M. Αφού και η N είναι από μόνη της πολλαπλότητα αυτή η περίπτωση ανάγεται στην ανωτέρω. Με άλλα λόγια εξαρτάται η ολοκληρωσιμότητα από την εμβάπτιση της N στην M. Εάν $x=(x^\mu)=(x^1,\dots,x^n), \mu=1,\dots,n$ είναι οι τοπικές συνταγμένες στην πολλαπλότητα M και $u=(u^j)=(u^1,\dots,u^p), j=1,\dots,p$, οι τοπικές συντεταγμένες στην υποπολλαπλότητα N, τότε

$$\int_N \alpha = \int_{\mathrm{N}} \alpha_{\mu_1\dots\mu_p}\left(x(u)\right)\frac{\partial x^{[\mu_1}}{\partial u^1}\dots\frac{\partial x^{\mu_p]}}{\partial u^p}du^1\wedge\dots\wedge du^p \tag{3.9}$$

Το γενικό θεώρημα του Stokes λέει ότι για κάθε λεία (n-1)-form α που ορίζεται επί φραγμένης περιοχής U μίας n-διάστατης πολλαπλότητας M, μέ ένα απλά συνεκτικό λείο όριο ∂U ισχύει η εξής έκφραση

$$\boxed{\int_U d\alpha = \int_{\partial U}\alpha} \tag{3.10}$$

Εδώ υποθέσαμε ότι ο προσανατολισμός του ∂U είναι συνεπής με το προσανατολισμό της U. Η ίδια σχέση ισχύει και για προσανατολισμένες πολλαπλότητες με όριο.