Θεώρημα Stokes.

• Έστω S απλή επιφάνεια με παραμετρική έκφραση

$$\vec{\Phi}(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \big)$$

και πεδίο ορισμού των παραμέτρων (u,v) περιοχή του επιπέδου D η οποία αναλύεται σε απλά χωρία.

•• Έστω $\vec{\sigma}$ το σύνορο της περιοχής D (∂D)
και $\vec{\Phi}(\vec{\sigma})$ το σύνορο της επιφάνειας S (∂S).

••• Για κάθε C^1 διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$, σε περιοχή που χώρου η οποία περιέχει την επιφάνεια S ισχύει ότι:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

με την φορά περιγραφής του συνόρου και το μοναδιαίο κάθετο να καθορίζονται με τον κανόνα της δεξιάς χειρός.

Έστω $\vec{\sigma}(t) = \big(u(t), v(t) \big)$ παραμετρική έκφραση του ∂D
και επομένως

$$\vec{\Phi}(u(t), v(t)) = \big(x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t)) \big)$$

παραμετρική έκφραση του ∂S, με

$t_1 \leq t \leq t_2$ για δεξιόστροφη περιγραφή του ∂D

(η οποία επάγει περιγραφή της ∂S).

Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(u(t),v(t)))\cdot \vec{dl} =$$

$$F_x(\vec{\Phi}(u(t),v(t)))\frac{dx(u(t),v(t))}{dt} + F_y(\vec{\Phi}(u(t),v(t)))\frac{dy(u(t),v(t))}{dt}$$

$$+ F_z(\vec{\Phi}(u(t),v(t)))\frac{dz(u(t),v(t))}{dt} =$$

$$F_x\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)+F_y\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)+F_z\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)$$

$$=\left(F_x\frac{\partial x}{\partial u}+F_y\frac{\partial y}{\partial u}+F_z\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{du}{dt}+\left(F_x\frac{\partial x}{\partial v}+F_y\frac{\partial y}{\partial v}+F_z\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{dv}{dt}$$

οπότε:

$$\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot\vec{dl}=\int_{t_1}^{t_2}\left[\vec{F}\cdot\vec{T}_u(u(t),v(t))\frac{du}{dt}+\vec{F}\cdot\vec{T}_v(u(t),v(t))\frac{dv}{dt}\right]$$

$$=\int_{\partial D}\vec{F}\cdot\vec{T}_u\,du+\vec{F}\cdot\vec{T}_v\,dv$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα Green για

την επίπεδη καμπύλη ∂D σύνορο της περιοχής D

παίρνουμε:

$$\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot\vec{dl}=\int_{\partial D}(\vec{F}\cdot\vec{T}_u)du+(\vec{F}\cdot\vec{T}_v)dv=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial u}(\vec{F}\cdot\vec{T}_v)-\frac{\partial}{\partial v}(\vec{F}\cdot\vec{T}_u)\right]du\,dv$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec F\cdot\vec T_v\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\vec F\cdot\vec T_u\right)=$$

$$=\frac{\partial F_x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+F_x\cancel{\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}+\frac{\partial F_y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+F_y\cancel{\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}}+\frac{\partial F_z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+F_z\cancel{\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}}$$

$$-\frac{\partial F_x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-F_x\cancel{\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}}-\frac{\partial F_y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}-F_y\cancel{\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}}-\frac{\partial F_z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}-F_z\cancel{\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}}=$$

$$=\cancel{\frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}+\frac{\partial F_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$-\cancel{\frac{\partial F_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

(μόνο αυτά με την πράσινη υπογράμμιση)

$$+\frac{\partial F_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\cancel{\frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}}+\frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$-\frac{\partial F_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}-\cancel{\frac{\partial F_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

(μόνο αυτά με την κόκκινη υπογράμμιση)

$$\frac{\partial F_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+\cancel{\frac{\partial F_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}$$

$$-\frac{\partial F_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial F_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}-\cancel{\frac{\partial F_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}}=$$

$$=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=$$

$$(\vec\nabla\times\vec F)_x(\vec T_u\times\vec T_v)_x+(\vec\nabla\times\vec F)_y(\vec T_u\times\vec T_v)_y+(\vec\nabla\times\vec F)_z(\vec T_u\times\vec T_v)_z$$

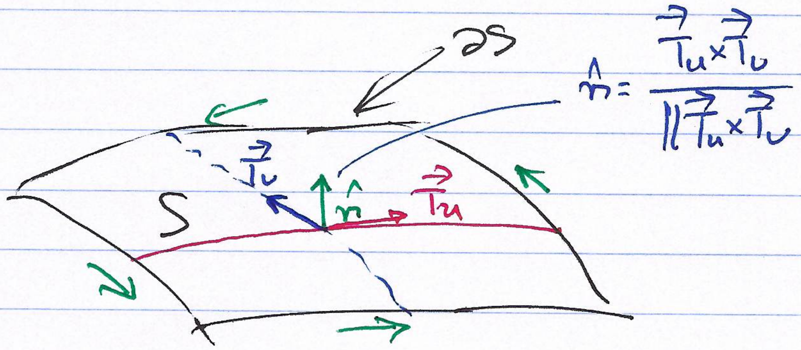
Άρα:

$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial u}(\vec{F}\cdot\vec{T}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{F}\cdot\vec{T}_u)\right] du\,dv =$$

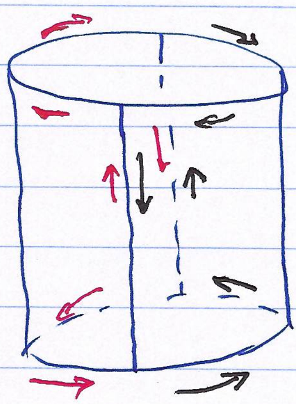
$$\int_D (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot(\vec{T}_u\times\vec{T}_v)\,du\,dv = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}\,ds$$

Επομένως:

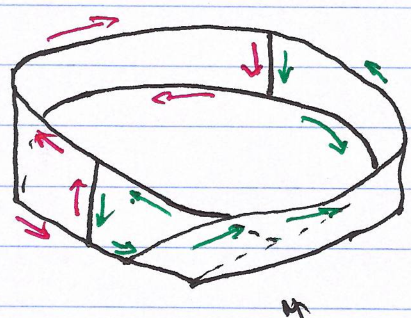
$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}\,ds$$



Γενίκευση του Θεωρήματος Stokes σε πιο πολύπλοκες επιφάνειες με ανάλυση σε απλές, αρκεί αυτές να είναι προσανατολίσιμες.



Προσανατολίσιμη επιφάνεια



Μη προσανατολίσιμη επιφάνεια (Möbius).

Υπάρχουν κλειστές γραμμές όπου μπορεί να ξεκινήσουμε από την μία πλευρά και να καταλήξουμε στην άλλη.

Δηλαδή: $\vec{\sigma}(t)$ C' κλειστή και στο σημείο

$P\ (\vec{\sigma}(t_1))$ να έχουμε $\hat{n}$

και $P\ (\vec{\sigma}(t_2))$ να έχουμε $-\hat{n}$

όπου $\hat{n}$ το διάνυσμα το κάθετο στην επιφάνεια.

Παραμετρική επιφάνεια Möbius

$$x = \cos\theta\,[2 + t\cos\theta/2]$$

$$y = \sin\theta\,[2 + t\cos\theta/2] \qquad -1 \le t \le 1$$

$$-\pi \le \theta \le \pi$$

$$z = t\sin\theta/2$$

$$\vec{T}_\theta = \left[-\sin\theta\,(2 + t\cos\theta/2) - \frac{t}{2}\cos\theta\sin\theta/2\right]\hat{i}$$

$$+\left[\cos\theta\,(2 + t\cos\theta/2) - \frac{t}{2}\sin\theta\sin\theta/2\right]\hat{j}$$

$$+\frac{t}{2}\cos\theta/2\,\hat{k}$$

$$\vec{T}_t = \cos\theta\cos\theta/2\,\hat{i} + \sin\theta\cos\theta/2\,\hat{j} + \sin\theta/2\,\hat{k}$$

Για $t=0$:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos\theta \\ y &= 2\sin\theta \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}\ \text{κύκλος ακτίνας } 2$$

$$\vec{T}_\theta(\theta,0) = -2\sin\theta\,\hat{i} + 2\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{T}_t(\theta,0) = \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\,\hat{i} + \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta/2\,\hat{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{T}_\theta(-\pi,0) &= -2\hat{j} \\ \vec{T}_t(-\pi,0) &= -\hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{T}_\theta(-\pi,0)\times\vec{T}_t(-\pi,0) = 2\hat{i}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{T}_\theta(\pi,0) &= -2\hat{j} \\ \vec{T}_t(\pi,0) &= \hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{T}_\theta(\pi,0)\times\vec{T}_t(\pi,0) = -2\hat{i}$$

Θεώρημα Gauss.

Εάν $\vec{F}$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε τρισδιάστατη απλή περιοχή Ω με σύνορο την κλειστή επιφάνεια $\partial\Omega$ τότε:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dv = \oint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds$$

με $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στην επιφάνεια προς το εξωτερικό της περιοχής Ω.

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega}\left(F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z\right)ds$$

Θεωρούμε τον όρο $\int_{\Omega} \frac{\partial F_z}{\partial z}\, dx\,dy\,dz$.

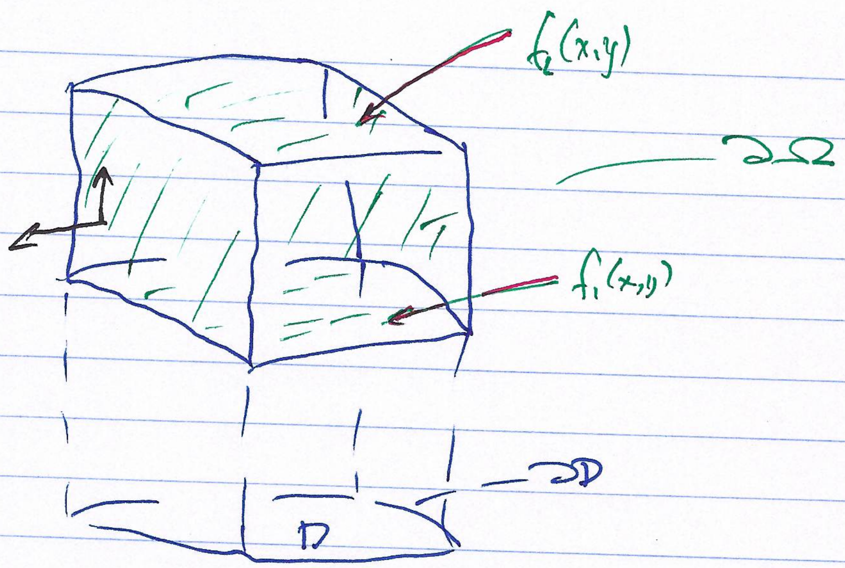
Εφ' όσον η περιοχή Ω είναι απλή, θα είναι και xy-απλή, δηλαδή:

$$\Omega = \{ (x,y,z) \;:\; f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\,,\; (x,y)\in D \}$$

και επομένως

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_z}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint_{D} \left[F_z(x,y,f_2(x,y)) - F_z(x,y,f_1(x,y)) \right] dx\,dy$$

Αυτό θα συγκριθεί με το $\int_{\partial\Omega} F_z \hat{k}\cdot\hat{n}\, ds$ όπου:



στην επιφάνεια $(x,y,f_2(x,y))$ το κάθετο διάνυσμα

είναι $\left(-\frac{\partial f_2}{\partial y}, -\frac{\partial f_2}{\partial x}, 1\right)$ (που δείχνει στο εξωτερικό της περιοχής)

Ενώ στην επιφάνεια $(x,y,f_1(x,y))$ το κάθετο διάνυσμα που δείχνει στο εξωτερικό της περιοχής είναι το:

$$\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}, -\frac{\partial f_2}{\partial x}, -1\right).$$

Άρα:

$$\int_{\partial\Omega} F_z \hat{k}\cdot\hat{n}\, dS = \int_D \left[F_z(x,y,f_2(x,y)) - F_z(x,y,f_1(x,y))\right] dx\,dy$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial F_z}{\partial z}\, dx\,dy\,dz$$

Η ροή από τις παράπλευρες επιφάνειες μηδενίζεται γιατί

$$\hat{k}\cdot\hat{n}_i = 0$$

Ομοίως για τους άλλους όρους εφ' όσον η Ω ως απλή περιοχή θα είναι και yz-απλή και zx-απλή.

Επομένως:

$$\boxed{\int_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dv = \oint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds \quad \text{Θεώρημα Gauss}}$$

Προφανώς ισχύει για γενικότερες περιοχές, με την απόδειξη να περιλαμβάνει ανάλυση της περιοχής σε απλές.