Ασκήσεις.

Σχέσεις Frenet:

$$\frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \hat{T}, \quad \frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N}, \quad \frac{d\hat{N}}{ds} = \tau \hat{B} - \kappa \hat{T}$$

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}.$$

1. Να αναπτυχθεί κατά Taylor καμπύλη $\vec{\gamma}(s)$ και να δοθεί η ερμηνεία της καμπυλότητας κ και της στρέψης τ.

$$\vec{\gamma}(s+\delta s) = \vec{\gamma}(s) + \delta s \frac{d\vec{\gamma}}{ds} + \frac{1}{2}(\delta s)^2 \frac{d^2\vec{\gamma}}{ds^2} + $$
$$+ \frac{1}{3!}(\delta s)^3 \frac{d^3\vec{\gamma}}{ds^3} + \dots$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \hat{T}, \quad \frac{d^2\vec{\gamma}}{ds^2} = \frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N}, \quad \frac{d^3\vec{\gamma}}{ds^3} = \frac{d}{ds}(\kappa\hat{N})$$

$$= \frac{d\kappa}{ds}\hat{N} + \kappa\frac{d\hat{N}}{ds}$$

$$= \frac{d\kappa}{ds}\hat{N} - \kappa^2\hat{T} + \kappa\tau\hat{B}$$

Επομένως:

$$\vec{\gamma}(s+\delta s) = \vec{\gamma}(s) + \left[\delta s - \frac{1}{3!}\kappa^2(\delta s)^3\right]\hat{T}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\kappa(\delta s)^2 + \frac{1}{3}\frac{d\kappa}{ds}(\delta s)^3\right]\hat{N} + \frac{\kappa\tau}{3!}(\delta s)^3\hat{B} + \dots$$

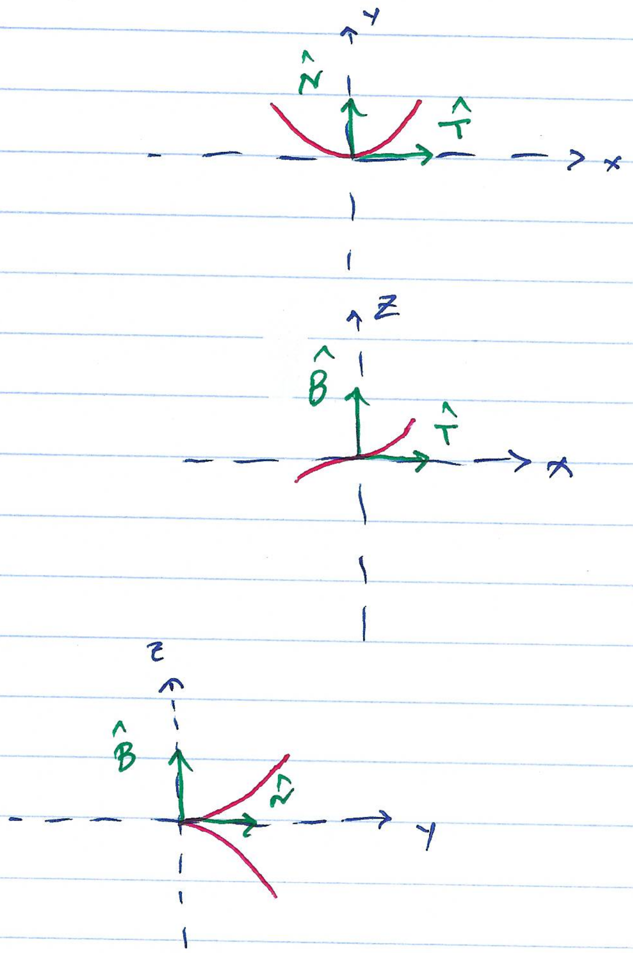
Έστω : $\delta s = \delta x$ $\quad (\hat{T} = \hat{i})$

$\Rightarrow$ $\delta y = \frac{\kappa}{2}(\delta x)^2$ $\quad (\hat{N} = \hat{j})$

$\delta z = \frac{\kappa \tau}{3!}(\delta x)^3$

ή $(\delta z)^2 = \frac{2\tau^2}{9\kappa}(\delta y)^3$

Σχηματικά:



(2.) Να εκφραστεί η καμπυλότητα κ ως προς την παράμετρο t.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t') \right\| dt' \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\|$$

και $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\|}$.

Συμβολίζουμε $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\sigma}'(t)$.

$$\hat{T} = \frac{d\vec{\gamma}(s)}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt} \qquad \left(\vec{\gamma}(s) = \vec{\sigma}(t(s)) \right)$$

$$\Rightarrow \hat{T} = \frac{\vec{\sigma}'}{\|\vec{\sigma}'\|}$$ (προφανώς σχέση για το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα)

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N} \quad \Rightarrow \quad \kappa \hat{N} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \frac{\vec{\sigma}'}{\|\vec{\sigma}'\|} = \frac{1}{\|\vec{\sigma}'\|} \frac{d}{dt} \frac{\vec{\sigma}'}{\|\vec{\sigma}'\|}$$

$$= \frac{1}{\|\vec{\sigma}'\|} \left\{ \frac{\vec{\sigma}''}{\|\vec{\sigma}'\|} - \frac{\vec{\sigma}'(\vec{\sigma}' \cdot \vec{\sigma}'')}{\|\vec{\sigma}'\|^3} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{\sigma}'\|^4} \left\{ \vec{\sigma}''(\vec{\sigma}' \cdot \vec{\sigma}') - \vec{\sigma}'(\vec{\sigma}' \cdot \vec{\sigma}'') \right\}$$

Από την ταυτότητα:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{G}) = (\vec{A} \cdot \vec{G}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{G}$$

παίρνουμε :

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = -\frac{1}{\|\vec{\sigma}'\|^4}\,\vec{\sigma}' \times (\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N} = \frac{(\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') \times \vec{\sigma}'}{\|\vec{\sigma}'\|^4}$$

$$\kappa = \left\|\frac{d\hat{T}}{ds}\right\| = \frac{\|\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}''\|}{\|\vec{\sigma}'\|^3}$$ (το $\vec{\sigma}'$ είναι κάθετο στο $\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}''$)

Άρα:

$$\boxed{\kappa = \frac{\|\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}''\|}{\|\vec{\sigma}'\|^3}}$$

και

$$\boxed{\hat{N} = \frac{(\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}'') \times \vec{\sigma}'}{\|\vec{\sigma}' \times \vec{\sigma}''\|\,\|\vec{\sigma}'\|}}$$

3. Να εκφρασθεί το $\hat{B}$ ως προς την παράμετρο t.

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} = \frac{\vec{\sigma}'}{\|\vec{\sigma}'\|} \times \frac{\vec{\sigma}''(\vec{\sigma}'\cdot\vec{\sigma}') - \vec{\sigma}'(\vec{\sigma}'\cdot\vec{\sigma}'')}{\|\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''\|\,\|\vec{\sigma}'\|} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{B} = \frac{\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''}{\|\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''\|}}$$

4. Να εκφρασθεί η στρέψη τ ως προς την παράμετρο t.

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{1}{\|\vec{\sigma}'\|}\frac{d}{dt}\hat{B} = \frac{1}{\|\vec{\sigma}'\|}\left\{\frac{\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}'''}{\|\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''\|} - \frac{\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''}{\|\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''\|^3}\left[(\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}'')\cdot(\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''')\right]\right\}$$

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{ds}\cdot\hat{N} = -\frac{1}{\|\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''\|^2}(\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''')\cdot\vec{\sigma}'' \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau = \frac{(\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}'')\cdot\vec{\sigma}'''}{\|\vec{\sigma}'\times\vec{\sigma}''\|^2}}$$

Βαθμωτές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

Μερικές παράγωγοι: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

Οι μερικές παράγωγοι ορίζουν ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{\nabla} f : \underset{\mathbb{R}^n}{D \subset} \to \mathbb{R}^n$

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Βαθμίδα της f.

- $f(\vec{r} + \delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \underbrace{\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r}}_{} + \dots$

Μεταβολή της f στην κατεύθυνση $\delta\vec{r}$

η "κατευθυνόμενη παράγωγος" : $\vec{\nabla} f \cdot \hat{n}$

μοναδιαίο διάνυσμα

• Πράγματι εάν

$$x'_i = \sum_j T_{ij} x_j \quad \Rightarrow \quad x_k = \sum_j (T^{-1})_{kj} x'_j = \sum_j (T)_{jk} x'_j$$

↳ ορθογώνιος μετασχηματισμός

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k T_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Εάν $f'(\vec{r}\,') = f(\vec{r})$

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_i} = \sum_k T_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

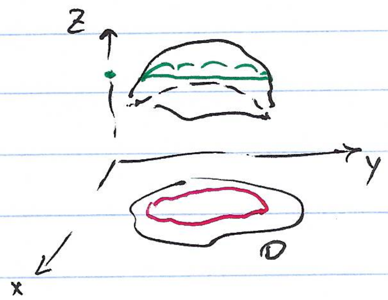
$$\Downarrow$$

$\vec{\nabla} f$: διάνυσμα,

$\vec{\nabla}$: διανυσματικός τελεστής.

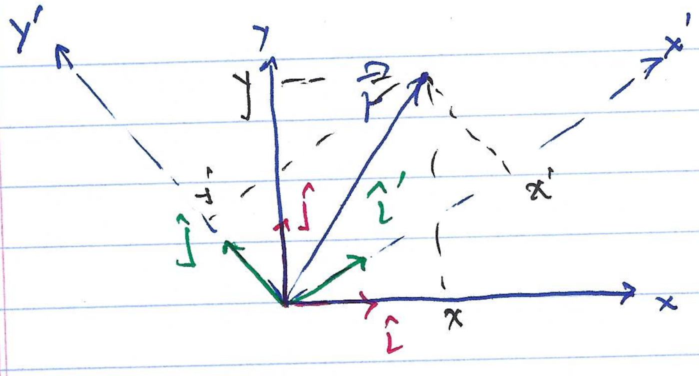
• Εποπτεία βαθμωτών συναρτήσεων.

(i). $n = 2$: $f(x,y) = z$



$D \subset \mathbb{R}^2$

Επιφάνεια : γράφημα της f.



$$\hat{i}' = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$$

$$\hat{j}' = \cos\varphi\,\hat{j} - \sin\varphi\,\hat{i}$$

$$x'\hat{i}' + y'\hat{j}' = x'(\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}) + y'(\cos\varphi\,\hat{j} - \sin\varphi\,\hat{i})$$

$$= (x'\cos\varphi - \sin\varphi\, y')\hat{i} + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}.$$

Ισοϋψείς καμπύλες:

α). Επί του πεδίου ορισμού:

$$f(x,y) = c$$

β). Επί του γραφήματος:

$$(x, y, c)$$

$$x, y : f(x,y) = c$$

Εάν $(x(t), y(t))$ παραμετρική έκφραση της ισοϋψούς καμπύλης επί του πεδίου ορισμού:

$$(x(t), y(t), c)$$

η καμπύλη επί του γραφήματος.

$$f(x(t), y(t)) = c = g(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dg}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0}$$

- $\vec{\nabla} f \perp$ στις ισοϋψείς καμπύλες (επί του πεδίου ορισμού).
- $\vec{r} \to \vec{r} + \delta\vec{r} \Rightarrow \delta f = \vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r} = \|\vec{\nabla} f\| \|\delta\vec{r}\| \cos\theta$
  $\Rightarrow$ Μέγιστη μεταβολή της f στην κατεύθυνση του $\vec{\nabla} f$.

(ii) Για $n=3$ έχουμε εποπτεία μόνο των επιφανειών επί των οποίων η f έχει σταθερή τιμή:

$$f(x,y,z) = c.$$

(Π.χ. ισοδυναμικές επιφάνειες στην ηλεκτροστατική ή ισοφασικές επιφάνειες στην κυματική).