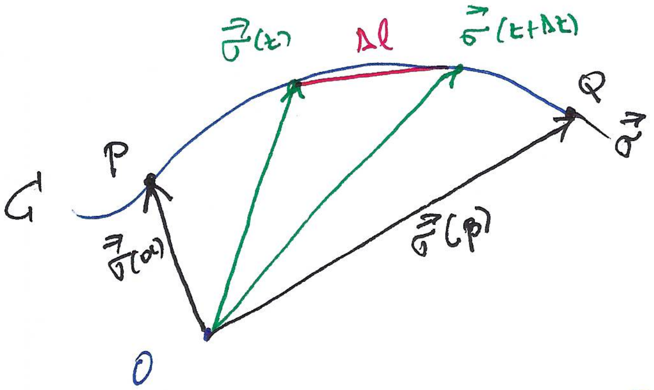
Μήκος τόξου.



$\vec{\sigma}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

Καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.

$$\Delta l = \| \vec{\sigma}(t+\Delta t) - \vec{\sigma}(t) \| =$$

$$= \left\{ [x_1(t+\Delta t) - x_1(t)]^2 + \dots + [x_n(t+\Delta t) - x_n(t)]^2 \right\}^{1/2}$$

Εάν η $\vec{\sigma}$ είναι διαφορίσιμη $\Rightarrow$ $x_i(t)$ διαφορίσιμες

$\Downarrow$ (Θεώρημα μέσης τιμής)

$$\boxed{x_i(t+\Delta t) - x_i(t) = \Delta t \, \frac{dx_i}{dt}(t_i^*) \qquad t < t_i^* < t+\Delta t}$$

$\Downarrow$

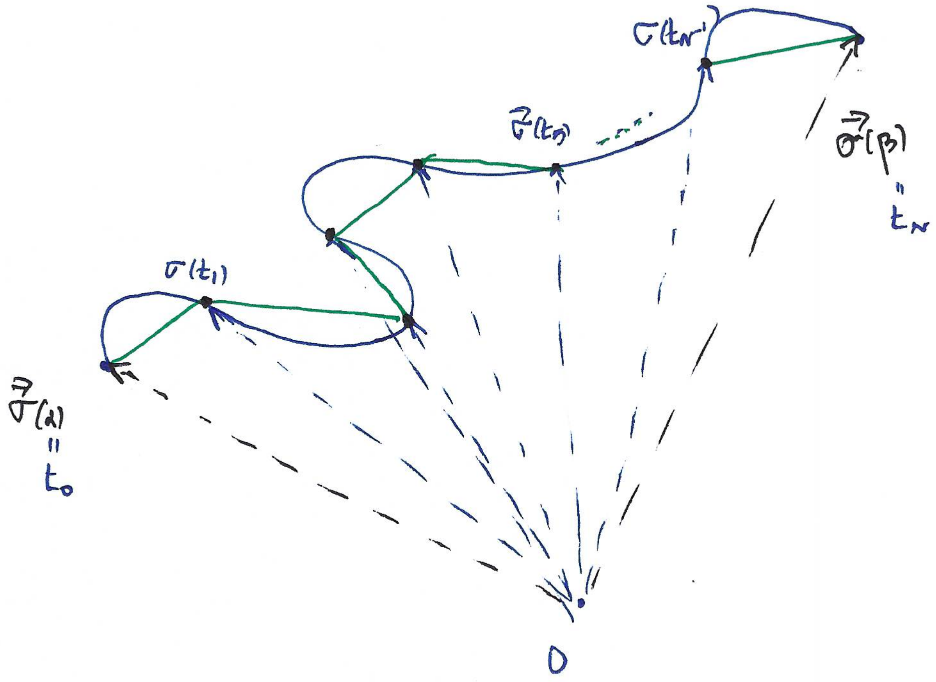
$$\Delta l = \Delta t \left\{ \left[\frac{dx_1}{dt}(t_1^*)\right]^2 + \dots + \left[\frac{dx_n}{dt}(t_n^*)\right]^2 \right\}^{1/2}$$

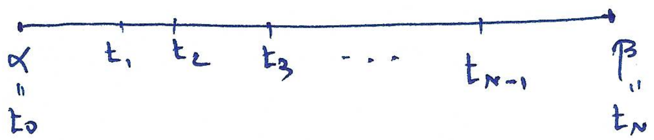
$\Downarrow$ $\Delta t \to 0$ $(t_i^* \to t)$

$$\boxed{\frac{dl}{dt} = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\|}$$

$$\boxed{dl = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| dt} \quad \text{Στοιχείο μήκους}$$

$$\boxed{l(C[PQ]) = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| dt = \int_{C[PQ]} dl}$$





$$\left.\begin{aligned}
&S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \|\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\| \\
&\|\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\| = \Big[\big(x_1(t_{i+1}) - x_1(t_i)\big)^2 + \dots + \big(x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)\big)^2 \Big]^{1/2} \\
&x_m(t_{i+1}) - x_m(t_i) = (t_{i+1} - t_i)\, \frac{dx_m}{dt}\big(t_i^{(m)}\big), \qquad m = 1, \dots, n
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

(Θεώρημα μέσης τιμής για διαφορίσιμες συναρτήσεις)

$$t_{i+1} < t_i^{(m)} < t_i$$

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) \Big[\Big(\frac{dx_1}{dt}\big(t_i^{(1)}\big) \Big)^2 + \dots + \Big(\frac{dx_n}{dt}\big(t_i^{(m)}\big)^2 \Big]$$

$$S_N = S_{0N} + [S_N - S_{0N}]$$

όπου

$$S_{0N} = \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i)\left[\left(\frac{dx_1}{dt}(t_i^*)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}(t_i^*)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$t_i < t_i^* < t_{i+1}$$

Όταν $N \to \infty$, $t_{i+1} - t_i \to 0$ και $x_m(t)$ είναι C^1 (C^1 καμπύλη)

$$S_{0N} \to \int_\alpha^\beta \left\|\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right\| dt$$

και αποδεικνύεται ότι $S_N - S_{0N} \to 0$.

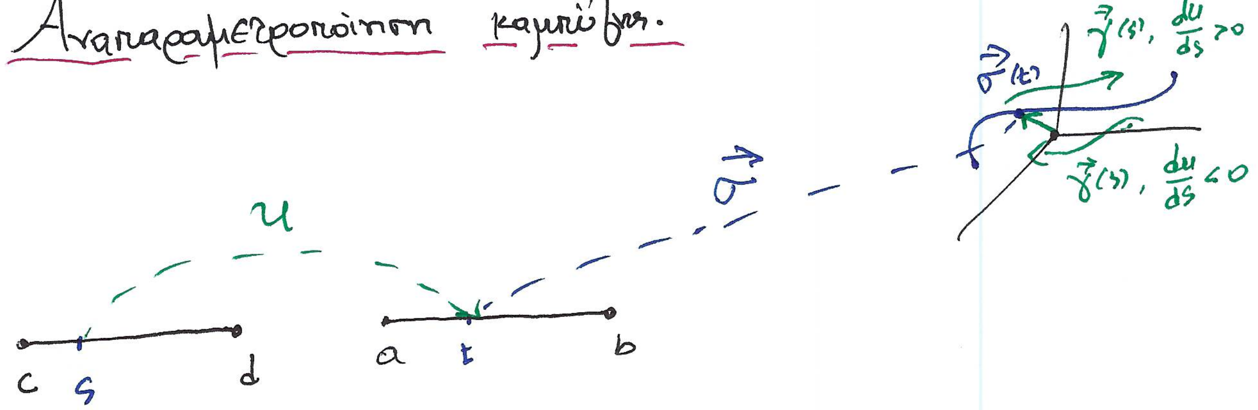
Επομένως το μήκος τόξου ($t \in [\alpha, \beta]$) μίας C^1 καμπύλης δίνεται από την έκφραση:

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \left\|\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right\| dt.}$$

Η έκφραση ισχύει και για "Τμηματικά C^1" καμπύλες.

$\vec{\sigma}$ τμηματικά C^1 όταν $\alpha = t_0'', t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, \beta = t_N''$ όταν είναι διαφορίσιμη στα (t_i, t_{i+1}) με συνεχή παράγωγο στα $[t_i, t_{i+1}]$.

Αναπαραμετροποίηση καμπύλης.



$$u : [c,d] \to [a,b]$$

$$\vec\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad , \qquad \vec\sigma(a), \vec\sigma(b) \text{ τα άκρα}$$

$$\vec\gamma = \vec\sigma \circ u : [c,d] \to \mathbb{R}^n$$

$$\vec\gamma(s) = \vec\sigma(t) = \vec\sigma(u(s))$$

$\sigma(t(s))$: πιο απλός συμβολισμός

Αναπαραμετροποιήσεις οι οποίες σέβονται τις ιδιότητες της καμπύλης.

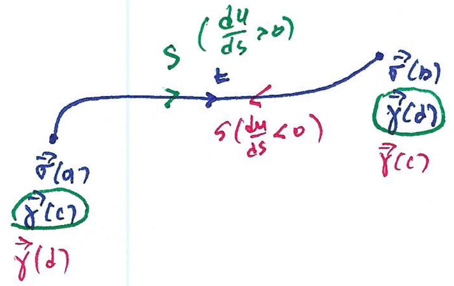
- u ένα προς ένα. $t=u(s)$, $s=u^{-1}(t)$, $\vec\gamma(s)$ ακριβώς η $\vec\sigma(t)$
- u συνεχής. $\vec\sigma(t)$ συνεχής $\Rightarrow$ $\vec\gamma(s)$ συνεχής
- $\vec\sigma$ λεία $\Rightarrow$ $\frac{d\vec\sigma}{dt} \neq 0$.

Εάν

$$\frac{d\vec\gamma}{ds} = \frac{du}{ds}\frac{d\vec\sigma}{dt} \to \frac{du}{ds} \neq 0 \to \vec\gamma(s) \text{ λεία.}$$

$$\frac{du}{ds}>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u(c)=a \\ u(d)=b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec\gamma(c)=\vec\sigma(a) \\ \vec\gamma(d)=\vec\sigma(b) \end{array}\right.$$

$$\frac{du}{ds}<0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u(c)=b \\ u(d)=a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec\gamma(c)=\vec\sigma(b) \\ \vec\gamma(d)=\vec\sigma(a) \end{array}\right.$$



- Το μήκος είναι ανεξάρτητο της παραμετροποίησης.

$$\vec{\sigma}(t) : \quad l_{(t)} = \int_a^b \left\| \frac{\vec{\sigma}(t)}{dt} \right\| dt$$

$$\vec{\gamma}(s) : \quad l_{(s)} = \int_c^d \left\| \frac{d\vec{\gamma}(s)}{ds} \right\| ds$$

Η αλλαγή μεταβλητής σε ολοκλήρωμα δίνεται από την έκφραση :

$$\int_c^d f(u(s)) \frac{du}{ds} ds = \int_{u(c)}^{u(d)} f(t) dt$$

$$l_{(s)} = \int_c^d \left\| \frac{d\vec{\gamma}(s)}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d\,\vec{\sigma}(u(s))}{ds} \right\| ds$$

$$= \int_c^d \left| \frac{du}{ds} \right| \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| ds$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \int_c^d \left(\frac{du}{ds} \right) \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| ds, & \frac{du}{ds} > 0 \\ \int_d^c \frac{du}{ds} \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| ds, & \frac{du}{ds} < 0 \end{array} \right\} = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| dt = l_{(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{l = l_{(t)} = l_{(s)}}$$

• Παράμετρος "μήκος τόξου".

$\vec{\sigma}(t)$, $t \in [a, b]$

$l(t) = \int_a^t \| \frac{d\vec{\sigma}}{dt'}$

$$s = l(t) = \int_a^t \| \frac{d\vec{\sigma}}{dt'}(t') \| dt'$$

$$\frac{ds}{dt} = \| \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t) \| > 0$$ (για λεία καμπύλη)

$$t \in [a, b] \Rightarrow s \in [0, l]$$

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\sigma}(t(s))$$

$\frac{ds}{dt} > 0 \Rightarrow$ $s(t)$ αντιστρέψιμη (γνησίως αύξουσα) $\Rightarrow$ $t(s)$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \frac{d}{ds} \vec{\sigma}(t(s)) = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)}}_{\text{παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης}} \Rightarrow \frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \frac{1}{\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \|} \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \hat{T}$$

$\hat{T}$ || (μοναδιαίο εφαπτόμενο)

$$\Downarrow$$

$$\| \frac{d\vec{\gamma}}{ds} \| = 1$$

(Παράμετρος μοναδιαίας ταχύτητας)

"Ομοκινούμενο" σύστημα.

Έστω $\vec{\gamma}(s)$ καμπύλη, s: η παράμετρος "μήκος τόξου"
λεία στον $\mathbb{R}^3$ (μοναδιαίας ταχύτητας)

$$\frac{d}{ds}\vec{\gamma}(s) \equiv \vec{\gamma}'(s) = \hat{T} \quad , \qquad \hat{T}: \text{μοναδιαίο εφαπτόμενο στην καμπύλη}$$

$$\hat{T}\cdot\hat{T} = 1 \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds}\cdot\hat{T} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} \perp \hat{T} \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} \left(= \gamma''(s)\right) = k\hat{N}$$

$$k = \left\|\frac{d\hat{T}}{ds}\right\| ,$$

$\hat{N}$: πρωτεύον κάθετο
k: καμπυλότητα

$$k = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} = 0 \Rightarrow \hat{T}: \text{σταθερό διάνυσμα}$$

$$\frac{d\vec{\gamma}(s)}{ds} = \hat{T} \Rightarrow \vec{\gamma}(s) = \vec{\gamma}(0) + s\hat{T}$$

(ημιευθεία με αρχή το $\vec{\gamma}(0)$ και κατεύθυνση $\hat{T}$).

Με $n = 3$:

$$\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N} \Rightarrow \|\hat{B}\| = 1 , \ \hat{B} \perp \hat{T}, \hat{N}.$$

$\hat{B}$: δευτερεύον κάθετο.

Επομένως: $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ δεξιόστροφο, τρισορθογώνιο σύστημα (βάση) σε κάθε σημείο της καμπύλης.

$$\|\hat{T}\| = \|\hat{N}\| = \|\hat{B}\| = 1$$

$$\hat{T}\cdot\hat{N} = \hat{T}\cdot\hat{B} = \hat{N}\cdot\hat{B} = 0$$

$$\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N} , \quad \hat{N} = \hat{B}\times\hat{T} , \quad \hat{T} = \hat{N}\times\hat{B} .$$

$$\left(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \right).$$

Σχέσεις Frenet.

$$\vec{\gamma}'(s) = \hat{T}$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = k\hat{N} \quad , \qquad k: \text{καμπυλότητα.}$$

$$\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N} \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{ds}\times\hat{N} + \hat{T}\times\frac{d\hat{N}}{ds}$$

$$= k\underbrace{\hat{N}\times\hat{N}}_{0} + \hat{T}\times\frac{d\hat{N}}{ds} \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds} = \hat{T}\times\frac{d\hat{N}}{ds}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds}\cdot\hat{T} = 0 \\ |\hat{B}| = 1 \quad &\Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds}\cdot\hat{B} = 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{n=3}$$

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N} \quad , \qquad \tau: \text{στρέψη.}$$

$(\tau = 0 \Rightarrow$ επίπεδη καμπύλη$)$.

$$\frac{d\hat{N}}{ds} = \frac{d}{ds}(\hat{B}\times\hat{T}) = \frac{d\hat{B}}{ds}\times\hat{T} + \hat{B}\times\frac{d\hat{T}}{ds} = -\tau\,\hat{N}\times\hat{T} + k\,\hat{B}\times\hat{N}$$

$$= \tau\hat{B} - k\hat{T}.$$

$\frac{d\hat{T}}{ds} = k\hat{N}, \quad \frac{d\hat{N}}{ds} = \tau\hat{B} - k\hat{T}, \quad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$ k: καμπυλότητα τ: στρέψη	Σχέσεις Frenet

Ασκήσεις.

1. Δίδεται το κυκλοειδές:

$$\vec{\sigma}(t) = a(t-\sin t,\ 1-\cos t).$$

Να υπολογισθεί το μήκος του στο τόξο $t\in[0,2\pi]$.

2. Να υπολογισθεί το ανωτέρω μήκος θεωρώντας το κυκλοειδές ως γράφημα συναρτήσεως $y=y(x)$.

3. Να δειχθεί ότι:

$$k = \|\vec{\gamma}''(s)\|$$

$$\tau = \frac{[\vec{\gamma}'(s)\times\vec{\gamma}''(s)]\cdot\vec{\gamma}'''(s)}{\|\vec{\gamma}''(s)\|^2}$$

4. Για τυχαία παραμετροποίηση να δειχθεί ότι:

$$k = \frac{\|\vec{\sigma}'(t)\times\vec{\sigma}''(t)\|}{\|\vec{\sigma}'(t)\|}$$

$$\tau = \frac{[\vec{\sigma}'(t)\times\vec{\sigma}''(t)]\cdot\vec{\sigma}'''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\times\vec{\sigma}''(t)\|^2}$$

5. Να υπολογισθεί το μήκος του υποκυκλοειδούς

$$\vec{\sigma}(t) = a(\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

6. Δίδεται η έλικα:

$$\vec{\sigma}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

στο τόξο $t \in [0, 2\pi]$.

(i). Να ευρεθεί το μήκος.

(ii). Να παραμετροποιηθεί με την παράμετρο "μήκος τόξου".

(iii). Να κατασκευασθεί το σύστημα Frenet.

(iv). Να ευρεθούν η καμπυλότητα και η στρέψη.