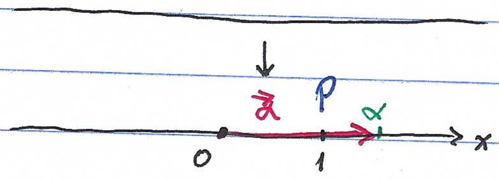
Ευκλείδειος χώρος - $\mathbb{R}^n$.

E_1 :
↓
$\mathbb{R}$:



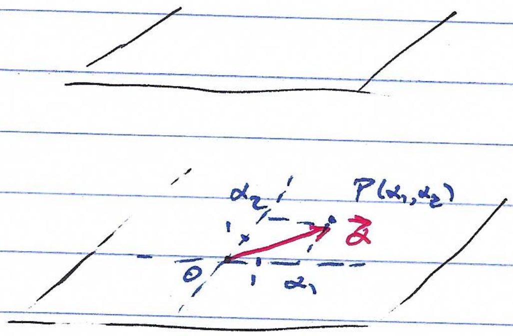
ευθεία
⇓
$\mathbb{R}$

άξονας

αρχή (σύστημα αναφοράς)

$P \mapsto \alpha$.

E_2 :
↓
$\mathbb{R}^2$:

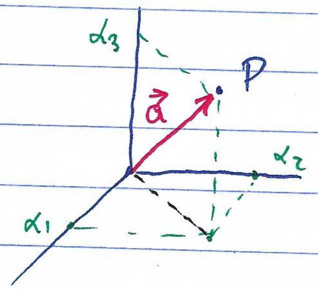


επίπεδο
⇓
$\mathbb{R}^2$

$P \longmapsto (\alpha_1, \alpha_2)$.

(O + άξονες): Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

E_3 :
↓
$\mathbb{R}^3$



χώρος
⇓
$\mathbb{R}^3$

$P \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Διάνυσμα $\vec{\alpha}$: Προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από την αρχή στο σημείο : $\overline{OP}$.

$E_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$P \longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

$\mathbb{R}^n : \{ \vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,n \}$

↳ Διανυσματικός χώρος (πραγματικός).

- $\vec a + \vec b$:

$\vec a = \vec b \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i,\ i=1,\dots,n.$

$\vec a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
$\vec b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$$\vec a + \vec b = \vec b + \vec a,$$
$$\vec a + (\vec b + \vec c) = (\vec a + \vec b) + \vec c,$$
$$\exists\, \vec 0 : \quad \vec a + \vec 0 = \vec a, \ \forall \vec a,$$
$$\forall \vec a \ \exists -\vec a : \ \vec a + (-\vec a) = 0.$$

μοναδικά

$$\vec a + \vec b = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

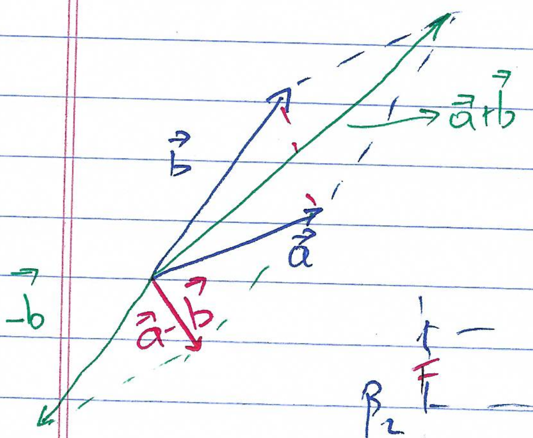
- $\lambda \vec a$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

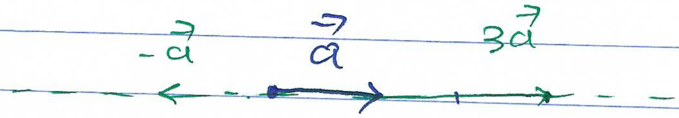
$$\lambda(\vec a + \vec b) = \lambda \vec a + \lambda \vec b$$
$$(\lambda + \mu)\vec a = \lambda \vec a + \mu \vec b$$
$$(\lambda\mu)\vec a = \lambda(\mu \vec a)$$
$$1\vec a = \vec a$$

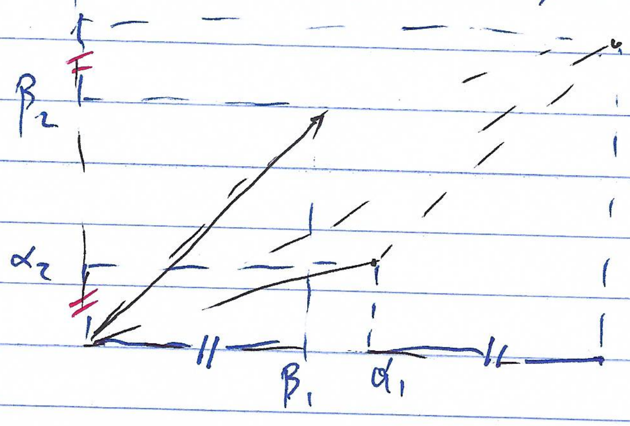
$$\lambda \vec a = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n).$$

$0\vec a = \vec 0$: $(0+\mu)\vec a = 0\vec a + \mu\vec a = \mu\vec a \Rightarrow 0\vec a = 0$

$(-1)\vec a = -\vec a$: $0 \cdot \vec a = 0 \Rightarrow (1+(-1))\vec a = 0 \Rightarrow$
$\vec a + (-1)\vec a = 0 \Rightarrow (-1)\vec a = -\vec a.$







$$\vec{a} = \alpha_1(1,\dots,0) + \alpha_2(0,1,\dots,0) + \dots + \alpha_n(0,0,\dots,1),$$

βάση του $\mathbb{R}^n$,

$\{(1,\dots,0), \dots (0,\dots,1)\}$.

n: μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Γραμμική ανεξαρτησία.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ γραμμικώς ανεξάρτητα όταν:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_m\vec{a}_m = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

- Στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να έχουμε ακριβώς n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα — βάση του χώρου.

$(n+1)$ διανύσματα είναι αναγκαστικά γραμμικώς εξηρτημένα.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας.

(i). $$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$$

Εαν έχουμε τις συνιστώσες των διανυσμάτων:

$$\vec{a}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \qquad (\mathbb{R}^n)$$

καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21} + \cdots + \lambda_n \alpha_{n1} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 \alpha_{1n} + \lambda_2 \alpha_{2n} + \cdots + \lambda_n \alpha_{nn} &= 0 \end{aligned}$$

Έχουμε μοναδική λύση την $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
τότε και μόνον τότε όταν:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{n1} \\ & & \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

δηλαδή η ορίζουσα "των συνιστωσών" είναι διάφορη του μηδενός.

Εάν έχω λιγότερα διανύσματα $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$, $m<n$

έχουμε:

$$\lambda_1 \alpha_{11} + \cdots + \lambda_m \alpha_{m1} = 0$$

$$\lambda_1 \alpha_{12} + \cdots + \lambda_m \alpha_{m2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 \alpha_{1m} + \cdots + \lambda_m \alpha_{mm} = 0$$

$$\lambda_1 \alpha_{1(m+1)} + \cdots + \lambda_m \alpha_{m(m+1)} = 0$$

$$\lambda_1 \alpha_{1n} + \cdots + \lambda_m \alpha_{mn} = 0$$

Για γραμμική ανεξαρτησία αρκεί ένα υποσύνολο m εξισώσεων να ικανοποιεί την συνθήκη.

Π.χ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{m3} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \cdots & \alpha_{m4} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{1(m+3)} & \alpha_{2(m+3)} & \cdots & \alpha_{m(m+3)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Εάν έχουμε περισσότερα διανύσματα από την διάσταση του χώρου, αυτά είναι οπωσδήποτε γραμμικώς εξηρτημένα.

π.χ. Έστω στον $\mathbb{R}^2$ τα διανύσματα

$$\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2), \quad \vec{b}=(\beta_1,\beta_2), \quad \vec{c}=(\gamma_1,\gamma_2).$$

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1+\lambda_3\gamma_1=0$$

$$\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\gamma_2=0$$

Εάν $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$ (πρέπει να ισχύει) τότε λύνουμε τις δύο εξισώσεις ως προς λ_1, λ_2:

$$\lambda_1 = -\lambda_3\frac{\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}$$

$$\lambda_2 = -\lambda_3\frac{\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}$$

και επομένως έχουμε και μη μηδενικές λύσεις.

(ii). Ορίζουσα Gram.

Έστω ότι έχουμε τα διανύσματα

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m .$$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_m = 0$$

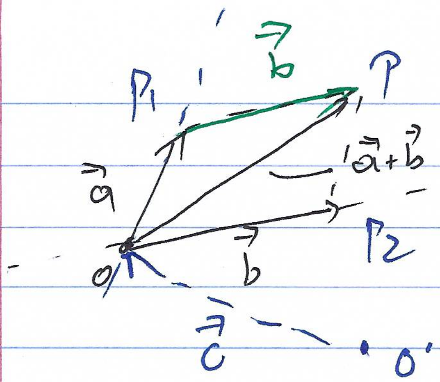
$$\vdots$$

$$\lambda_1 \vec{a}_m \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_m \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m \cdot \vec{a}_m = 0$$

Επομένως $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα όταν η ορίζουσα Gram

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_m \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_m \\ \vdots & & \\ \vec{a}_m \cdot \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_m \cdot \vec{a}_m \end{vmatrix}$$

είναι μη μηδενική.



$\vec b$: παράλληλη μεταφορά.

$s\vec a$: ευθεία που ορίζει το $\vec a$,

$t\vec b$: -//- $\vec b$.

$0 \le s,t \le 1$: περιοχή του παραλληλογράμμου.

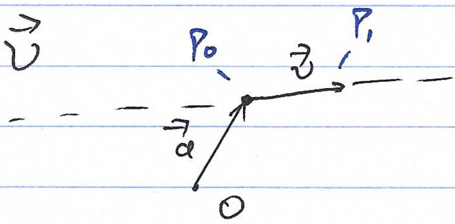
// μεταφορά:

$$P_1 = \vec c + \vec a$$
$$\vec P_2 = \vec c + \vec b$$
$$\vec P = \vec c + \vec a + \vec b$$

• Εξίσωση ευθείας.

(i). Διέρχεται από το $\vec a$ και ορίζεται από διάνυσμα $\vec v$:

$$\vec r = \vec a + t\vec v$$



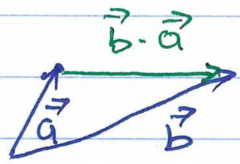
$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - a_1 = tv_1 \\ x - a_2 = tv_2 \\ x - a_3 = tv_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

ή π.χ. $y = a_2$ και

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

(ii). Διέρχεται από δύο σημεία $\vec a$, $\vec b$

$$\vec r = \vec a + t\underbrace{(\vec b - \vec a)}_{\vec v}$$



$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{z-a_3}{b_3-a_3}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + (s+s_0)\vec{v}$$

$$= (\vec{a} + s_0\vec{v}) + s\vec{v}$$

$s = -s_0$ $\quad \vec{r} = \vec{a}$

$s = 1-s_0$ $\quad \vec{r} = \vec{a}+\vec{v}$

} αλλαγή παραμέτρου.

• Εξίσωση επιπέδου.

(i). $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_1$$

(ii). $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

α). $\vec{v}_1 = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \beta_3 - \alpha_3)$, $\quad \vec{v} = (\gamma_1 - \alpha_1, \gamma_2 - \alpha_2, \gamma_3 - \alpha_3)$

$$\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - a) + s(\vec{c} - \vec{a}) = (1-t-s)\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}$$

$$= \vec{b} + k(\vec{a} - \vec{b}) + \ell(\vec{c} - \vec{b})$$

$$= k\vec{a} + (1-\ell-k)\vec{b} + \ell(\vec{c})$$

$s = \ell$ $\quad 1-\ell-k = t$ $\quad 1-s-t =$

$1-\ell-1+\ell+k = k$

$1-t-s = 1-1+\ell+k-\ell = k$

Μετρικές σχέσεις.

Απόσταση του P από την αρχή
(μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OP):

$$OP = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

(Πυθαγόρειο θεώρημα)

P: $\vec{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

(Ευκλείδειο μέτρο)

Χώρος με νόρμα.

Ιδιότητες $\| \; \|$.

- $\|\vec{a}\| \geq 0$, $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.
- $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$.
- $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

Μετρικός χώρος.

Απόσταση μεταξύ δύο σημείων:

$P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $Q = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$$d(P,Q) = \|\vec{a} - \vec{b}\| = d(\vec{a}, \vec{b})$$
$$= \{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)^2\}^{1/2}$$

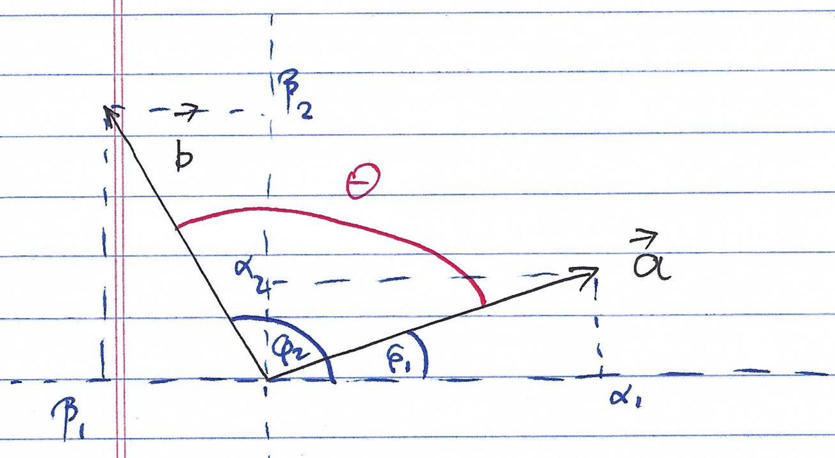
(Ευκλείδεια απόσταση).

Ιδιότητες d.

- $d(\vec{a}, \vec{b}) = d(\vec{b}, \vec{a})$.
- $d(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$.
- $d(\vec{a}, \vec{b}) \leq d(\vec{a}, \vec{c}) + d(\vec{c}, \vec{b})$.

Εσωτερικό γινόμενο.

Γωνίες.



$$\alpha_1 = \|\vec{a}\| \cos\varphi_1 \qquad \beta_1 = \|\vec{b}\| \cos\varphi_2$$
$$\alpha_2 = \|\vec{a}\| \sin\varphi_1 \qquad \beta_2 = \|\vec{b}\| \sin\varphi_2$$

Για την κυρτή γωνία μεταξύ των $\vec{a}, \vec{b}$ θεωρώ το συνημίτονο της γωνίας, το οποίο είναι μονοσήμαντη συνάρτηση:

$$\cos\theta = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1$$
$$= \frac{\beta_1 \alpha_1}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} + \frac{\beta_2 \alpha_2}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

Εσωτερικό γινόμενο: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$

(Ευκλείδειο) $= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$

η κυρτή γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

$\vec{a},\vec{b} \neq 0$: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \vec{a} \perp \vec{b}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \Rightarrow \theta = 0$ $\quad$ συνευθειακά και ομόρροπα.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \Rightarrow \theta = \pi$ $\quad$ συνευθειακά και αντίρροπα.

Στον $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n}$$

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου: (Ευκλειδείου).

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
- $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\,\vec{a}\cdot\vec{b}$
- $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$ και $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = 0$. (Θετικά ορισμένο).

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{a}\| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{1/2}$$

$$d(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{a}-\vec{b}\| = [(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})]^{1/2}$$

α). Ανισότητα Cauchy - Schwarz.

Σε χώρο με θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|.$$

Απόδειξη.

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}\|^2 + \lambda\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \lambda\,\vec{b}\cdot\vec{a} + \lambda^2\|\vec{b}\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2\|\vec{b}\|^2 + 2\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \|\vec{a}\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \leq 0$$ (διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς λ),

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$$

Εάν η διακρίνουσα μηδενίζεται έχουμε μια διπλή ρίζα

$$\lambda_0 = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\|\vec{b}\|^2}$$

$$\Rightarrow (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}+\lambda\vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a}+\lambda\vec{b} = 0$$ (θετικά ορισμένο)

$$\lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}$$ γραμμικώς εξαρτημένα.

Ομόρροπα εάν $\lambda < 0$,
αντίρροπα εάν $\lambda > 0$, κείμενα επί ευθείας.

β). Τριγωνική ανισότης.

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\le \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\,|\vec{a}\cdot\vec{b}| \qquad (\vec{a}\cdot\vec{b}\in\mathbb{R}\Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}|\le \vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\le \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \qquad (\text{Ανισότης C-S})$$

$$= (\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|.$$

Για να ισχύει ως ισότης πρέπει:

(i). C-S ως ισότης $\Rightarrow$ $\vec{a}=\mu\vec{b}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\mu\|\vec{b}\|^2$.

(ii). $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}\cdot\vec{b}| \Rightarrow \mu=|\mu| \Rightarrow \mu>0.$

Διανύσματα συνευθειακά και ομόρροπα.

- C-S $\Rightarrow$ $-1\le \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\le 1$
- $d(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}-\vec{c}+\vec{c}-\vec{b}\| \le \|\vec{a}-\vec{c}\|+\|\vec{c}-\vec{b}\| \Rightarrow$
  $d(\vec{a},\vec{b}) \le d(\vec{a},\vec{c})+d(\vec{c},\vec{b})$
- $\|\vec{a}\|=1 \rightarrow$ μοναδιαίο $\hat{a}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

• Η βάση:

$$(1,0,\dots,0) \;,\; \dots \;,\; (0,\dots,0,1)$$
$$\hat{e}_1 \;,\; \dots \;,\; \hat{e}_n$$

είναι ορθοκανονική:

$n=2$: $\hat{i},\hat{j}$
$n=3$: $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ } συνήθως

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

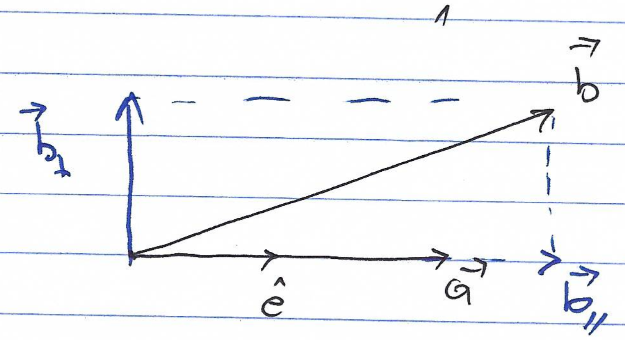
• Προβολή:

$$\vec{a}\rightarrow\hat{e}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$\vec{b}$: προβολή του $\vec{b}$ στην $\hat{e}$: $\hat{e}(\hat{e}\cdot\vec{b})$

$$\vec{b}=\underbrace{\{\vec{b}-\hat{e}(\hat{e}\cdot\vec{b})\}}_{\vec{b}_\perp}+\underbrace{\hat{e}(\hat{e}\cdot\vec{b})}_{\vec{b}_\parallel}$$ στην $\hat{e}$.

$$\hat{e}\cdot\vec{b}_\perp=\hat{e}\cdot\vec{b}-\underbrace{(\hat{e}\cdot\hat{e})}_{1}(\hat{e}\cdot\vec{b})=0$$



$$\vec{b}_\perp\cdot\vec{b}_\perp=\|\vec{b}\|^2+(\hat{e}\cdot\vec{b})^2-2(\hat{e}\cdot\vec{b})^2=\|\vec{b}\|^2-(\hat{e}\cdot\vec{b})^2$$
$$=\|\vec{b}\|^2(1-\cos^2\theta)=\|\vec{b}\|^2\sin^2\theta$$

$\|\vec{b}_\perp\|=\|\vec{b}\|\sin\theta$

$\sin\theta \geq 0$ για κυρτή γωνία. *

• Εάν για $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ισχύει:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n\|^2 = \|\vec{a}_1\|^2 + \dots + \|\vec{a}_n\|^2$$

$\rightarrow$ Π. Θ.

• Ταυτότητα παραλληλογράμμου. *

• $$\left.\begin{aligned} \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \\ \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ νόμος συνημιτόνων

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}-\vec{b}\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{4\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}-\vec{b}\|^2\right).$$

* $$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2\right)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \cancel{\vec{b}\cdot\vec{a}}$$ $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \rightarrow$ ρόμβος.

* $$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{c} &= \alpha\|\vec{a}\|^2 \\ \vec{b}\cdot\vec{c} &= \beta\|\vec{b}\|^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\|\vec{a}\|^2} \\ \beta &= \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{b}\|^2} \end{aligned}\right.$$

Γενίκευση για n. Απλοποίηση για $\hat{a}, \hat{b}$.

Εξωτερικό γινόμενο.

$n=3$.

$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
$\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

Εξωτερικό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}$

Τυπικά γράφεται ως μία 3×3 ορίζουσα:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

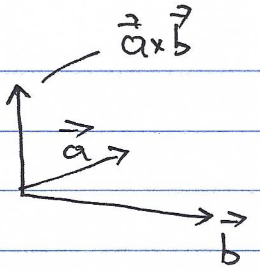
Ιδιότητες.

(i). $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, $\quad \vec{a}\times\vec{a} = 0$,

(ii). $\vec{a}\times(\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2) = \lambda_1\,\vec{a}\times\vec{b}_1 + \lambda_2\,\vec{a}\times\vec{b}_2$,

$(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2)\times\vec{b} = \lambda_1\,\vec{a}_1\times\vec{b} + \lambda_2\,\vec{a}_2\times\vec{b}$,

(iii). $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$.



Κανόνας δεξιάς χειρός.

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}, \quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}, \quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}.$$

(iv). $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = 0$ (Jacobi).

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2$$

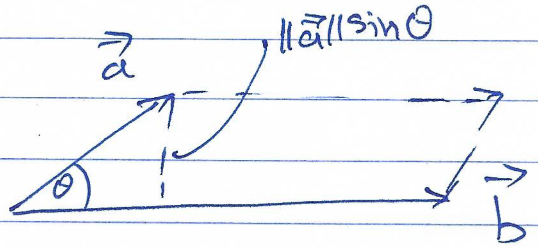
$$a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 +$$
$$+ a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3$$
$$+ a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 =$$

$$a_1^2\|\vec{b}\|^2 - a_1^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2$$
$$+ a_2^2\|\vec{b}\|^2 - a_2^2b_2^2 - 2a_2b_2a_3b_3$$
$$+ a_3^2\|\vec{b}\|^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_3b_3 =$$

$$\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$$
$(\sin\theta \geq 0)$

εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}$.



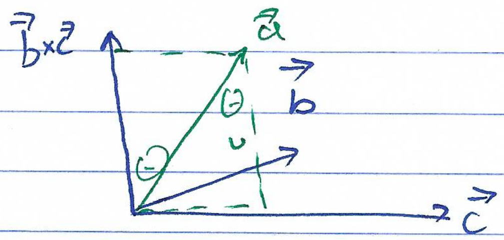
- $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$
  $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{k}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$E = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

- Μικτό γινόμενο.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$



$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{a}\| \cos\theta = \upsilon \\ \|\vec{b}\times\vec{c}\| = E_{\square} \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = \|\vec{a}\|\upsilon E = V$$

V : όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

με ίσες απόλυτες τιμές.

• Επίπεδο $\perp$ στο $\hat{n}$ που να διέρχεται από το σημείο $\vec{a}$. (έστω P).

P: $\quad \vec{r} \in P \Rightarrow (\vec{r} - \vec{a}) \cdot \hat{n} = 0$

$$(x-a_1)n_1 + (y-a_2)n_2 + (z-a_3)n_3 = 0$$

$$\Rightarrow n_1 x + n_2 y + n_3 z - (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3) = 0$$

• Επίπεδο από τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) \perp P$$

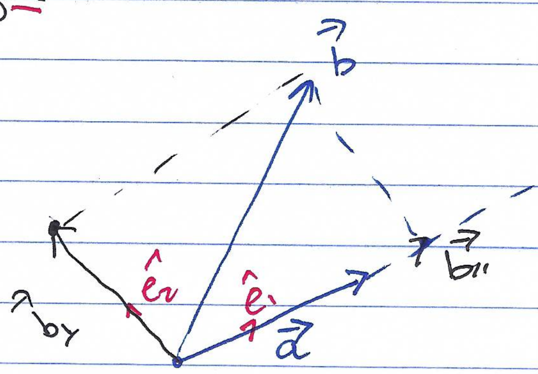
$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \left[(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right] = 0$$

$$(x-a_1)\left[(b_2-a_2)(c_3-a_3) - (b_3-a_3)(c_2-a_2)\right]$$
$$+ (y-a_2)\left[(b_3-a_3)(c_1-a_1) - (b_1-a_1)(c_3-a_3)\right]$$
$$+ (y-a_3)\left[(b_1-a_1)(c_2-a_2) - (b_2-a_2)(c_1-a_1)\right] = 0$$

$$\alpha - a_1 = \kappa(\beta_1 - a_1) + \lambda(c_1 - a_1)$$
$$y - a_2 = \kappa(\beta_2 - a_2) + \lambda(c_2 - a_2)$$
$$z - a_3 = \kappa(\beta_3 - a_3) + \lambda(c_3 - a_3)$$

απαλοιφή των κ, λ

Προβολή:



$$\vec{a} \longmapsto \hat{e}_1 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$$\vec{b} = \vec{b}_{\perp} + \underbrace{\hat{e}_1(\hat{e}_1 \cdot \vec{b})}_{\vec{b}_{\parallel}} \qquad \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{b}_{\perp}\|^2 + \|\vec{b}_{\parallel}\|^2$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{b}_{\perp}}{\|\vec{b}_{\perp}\|}$$

- $$\vec{c} = \vec{c}_{\perp} + \hat{e}_1(\hat{e}_1 \cdot \vec{c}) + \hat{e}_2(\hat{e}_2 \cdot \vec{c})$$

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{c}_{\perp}\|^2 + c_1^2 + c_2^2$$

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{c} = \hat{e}_1 \cdot \vec{c}_{\perp} + \hat{e}_1 \cdot \vec{c} \Rightarrow \hat{e}_1 \cdot \vec{c}_{\perp} = 0, \quad \hat{e}_2 \cdot \vec{c}_{\perp} = 0.$$

- $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m\}$ ορθοκανονικό

$V_m = \{ \alpha_1 \hat{e}_1 + \dots + \alpha_m \hat{e}_m \}$

$$\| \vec{c} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \hat{e}_i \|^2 \geq \| \vec{c} - \sum c_i \hat{e}_i \|^2$$

Απόσταση από υπόχωρο.

$$\| \vec{c} \|^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i =$$

$$\| \vec{c} \|^2 - \sum_{i=1}^{m} c_i^2 + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - c_i)^2$$

$$\vec{c} = \vec{c}_\perp + \sum_i c_i \hat{e}_i$$

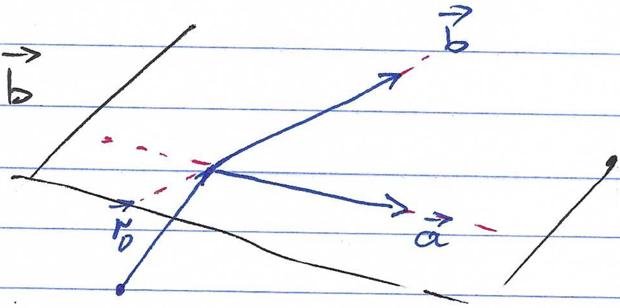
$$\| \vec{c} \|^2 = \| \vec{c}_\perp \|^2 + \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \Rightarrow \| \vec{c} \|^2 - \sum_{i=1}^{m} |c_i|^2 = \| \vec{c}_\perp \|^2 = \| \vec{c} - \sum_i c_i \hat{e}_i \|^2$$

$$\| \vec{c} - \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \| \leq \| \vec{c} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \hat{e}_i \|$$

Ισότητα όταν $c_i = \alpha_i$

Εξίσωση επιπέδου.

- $\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{a} + \lambda\vec{b}$



- $Ax + By + \Gamma x = \Delta$

- Περιέχει τα σημεία $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$
$\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$

$\vec{a} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
$\vec{b} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1$

$$\vec{r} = \vec{v}_1 + k_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \lambda_1(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$$

$$= \vec{v}_2 + k_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \lambda_2(\vec{v}_3 - \vec{v}_2)$$

$$= \vec{v}_3 + k_3(\vec{v}_1 - \vec{v}_3) + \lambda_3(\vec{v}_2 - \vec{v}_3)$$

$k_2\vec{v}_1 + (1 - k_2 - \lambda_2)\vec{v}_2 + \lambda_2\vec{v}_3$

$k_3\vec{v}_1 + \lambda_3\vec{v}_2 + (1 - k_3 - \lambda_3)\vec{v}_3$

$k_3 = k_2$
$\lambda_3 = 1 - k_2 - \lambda_2$
$\Downarrow$
$\lambda_2 = 1 - k_3 - \lambda_3$

$$x - x_0 = \kappa\alpha_1 + \lambda\beta_1$$
$$y - y_0 = \kappa\alpha_2 + \lambda\beta_2$$
$$z - z_0 = \kappa\alpha_3 + \lambda\beta_3$$

$$\mu_1 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1 = 0$$
$$\mu_1 \alpha_2 + \mu_2 \beta_2 = 0$$

$$\mu_1 \alpha_3 + \mu_2 \beta_3 = 0$$

$\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ η $\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1$ η $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \neq 0$

για γραμμική ανεξαρτησία

$$\kappa = \frac{(x-x_0)\beta_2 - (y-y_0)\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

$$\lambda = \frac{(y-y_0)\alpha_1 - (x-x_0)\alpha_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

$$(z-z_0)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = (x-x_0)\beta_2\alpha_3 - (y-y_0)\beta_1\alpha_3$$
$$+ (y-y_0)\alpha_1\beta_3 - (x-x_0)\alpha_2\beta_3$$

$$x(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3) + y(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) + z(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) =$$

$$z_0(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) + x_0(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3) + y_0(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)$$

Π.χ. $Ax + By + \Gamma = \Delta$

$\vec{v}_1 = \left(\frac{\Delta}{A}, 0, 0\right)$

$\vec{v}_2 = \left(0, \frac{\Delta}{B}, 0\right)$

$\vec{v}_3 = (0, 0, \quad)$

και : $\vec{a} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \left(-\frac{\Delta}{A}, \frac{\Delta}{B}, 0\right)$

$\vec{b} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1 = \left(-\frac{\Delta}{A}, 0, \frac{\Delta}{\Gamma}\right)$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \kappa\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$= \vec{v}_1 + \kappa(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \lambda(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$$

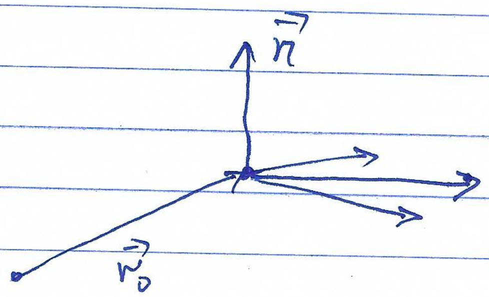
$$x = \frac{\Delta}{A} + \kappa\left(-\frac{\Delta}{A}\right) + \lambda\left(-\frac{\Delta}{A}\right) \Rightarrow Ax = \Delta(1 - \kappa - \lambda)$$

$$y = 0 + \kappa\frac{\Delta}{B} \Rightarrow By = \kappa\Delta$$

$$z = 0 + \lambda\frac{\Delta}{\Gamma} \Rightarrow \Gamma z = \lambda\Delta$$

$$Ax + By + \Gamma z = \Delta.$$

• Επίπεδο $\perp$ στο $\vec{n}$ και περνάει από το $\vec{r}_0$



$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-x_0)n_1 + (y-y_0)n_2 + (z-z_0)n_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x n_1 + y n_2 + z n_3 = x_0 n_1 + y_0 n_2 + z_0 n_3$$

• $\vec{a}, \vec{b} \quad \curvearrowright \quad \vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$

$$= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3,\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

$$x(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + y(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + z(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

$$= x_0(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + y_0(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + z_0(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

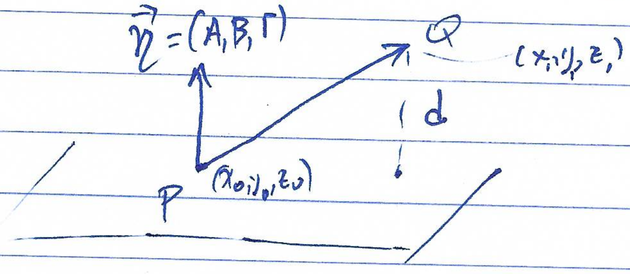
$$Ax + By + \Gamma z = \Delta$$

$$\Downarrow$$

$$(A, B, \Gamma) = \vec{n}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{r}_0 = \Delta$$

Απόσταση σημείου από επίπεδο.



$$Ax + By + \Gamma z = \Delta$$

$$d = \frac{|(\vec{PQ} \cdot \vec{n})|}{\|\vec{n}\|}$$

Προβολή $\perp$: $\quad (\vec{PQ} \cdot \vec{n})\vec{n}$

$$d = \frac{|(\vec{PQ} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}$$

$$\frac{(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)\Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}} =$$

$$= \frac{x_1 A + y_1 B + z_1 \Gamma - \Delta}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}.$$