Ανάλυση ΙΙ και Εφαρμογές - Τμήμα Φυσικής ΕΚΠΑ
Εξέταση 16ης Ιουνίου 2023

Θέμα 1ο: Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με τύπους

$$f(x,y) = xy \text{ και } g(x,y) = x^2 + y^2 - 2a^2,$$

όπου $a > 0$ γνωστή σταθερά. Έστω, επίσης, τα σύνολα:

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leq 0\}, \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leq 0, x \geq 0, \text{ και } y \geq 0\}. \end{aligned}$$

(α) Να γράψετε την εξίσωση του εφαπτόμενου επίπεδου στο γράφημα της g στο σημείο $(a, -a)$.

(β) Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στα σύνολα B και C.

(γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στα σύνολα B και C και τα αντίστοιχα σημεία αυτών των χωρίων στα οποία επιτυγχάνονται αυτές οι τιμές.

(δ) Να βρεθεί ο όγκος μεταξύ του χωρίου D του επιπέδου xy και του γραφήματος της f.

Θέμα 2ο: (α) Να εξετάσετε την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{10(x-1)(y-1)}{3(x-1)^2 + 5(y-1)^2}$$

και, στην περίπτωση που υπάρχει, να το υπολογίσετε.

(β) Ένας ποδηλάτης κινείται στο επίπεδο xy, διαγράφοντας κατά τη θετική φορά την κυκλική τροχιά με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, με μοναδιαία γωνιακή ταχύτητα. Η θερμοκρασία στο σημείο (x,y) δίνεται από τον τύπο $T(x,y) = x^2 e^y - xy^3$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας που αισθάνεται ο ποδηλάτης ως συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή την dT/dt.

(γ) Να γραφεί το διπλό ολοκλήρωμα της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x,y) = (x+y)^2$, επί του χωρίου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$ ως διαδοχικό ολοκλήρωμα $dxdy$ και ως διαδοχικό ολοκλήρωμα $dydx$ και να υπολογιστεί, χρησιμοποιώντας μία από τις δυο αυτές μορφές.

Θέμα 3ο: Δίδεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y) = xy\,\hat{\imath} + y^2\,\hat{\jmath}$ και το χωρίο D του επιπέδου xy το οποίο περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x$.

(α) Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\oint_{\partial D} \vec{F}\cdot\hat{\tau}dl$ και $\oint_{\partial D} \vec{F}\cdot\hat{n}dl$, όπου $\hat{\tau}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο κατά την θετική φορά και $\hat{n}$ το μοναδιαίο το κάθετο στο σύνορο της περιοχής με φορά προς το εξωτερικό αυτής.

(β) Να επαληθευτεί για τα ανωτέρω ολοκληρώματα το θεώρημα Green.

Θέμα 4ο: (α) Δίδεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = x^3\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath} + z^3\hat{k}$. Να υπολογισθεί η ροή του, $\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds$ όπου S η σφαίρα με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss.

(β) Σε περιοχή του τριδιάστατου χώρου Ω στην οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Gauss, να δείξετε ότι $\oint_{\partial\Omega} \vec{F}_1\cdot\hat{n}ds = \oint_{\partial\Omega} \vec{F}_2\cdot\hat{n}ds = \oint_{\partial\Omega} \vec{F}_3\cdot\hat{n}ds$, όπου $\vec{F}_1 = x\hat{\imath}$, $\vec{F}_2 = z\hat{k}$, $\vec{F}_3 = \frac{1}{3}\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)$

(γ) Δίδεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$, όπου $\vec{B}$ σταθερό διάνυσμα. Να επαληθευτεί το θεώρημα Stokes για το ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Καλή επιτυχία!